



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Nudos y polinomios

Autor/es

EVELINA MALINOVA LETKOVA

Director/es

JOSÉ MARÍA PÉREZ IZQUIERDO

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2018-19



Nudos y polinomios, de EVELINA MALINOVA LETKOVA
(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative
Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los
titulares del copyright.



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Nudos y polinomios
Knots and polynomials

Realizado por:
Evelina Letkova

Tutelado por:
José María Pérez Izquierdo

Logroño, Julio, 2019

Resumen

En este trabajo haremos una introducción a la teoría de nudos. Después de algunas definiciones, estudiaremos algunos de los muchos invariantes asociados a un nudo y veremos cómo de importantes son los polinomios para distinguir dos nudos no equivalentes. Al final, introduciremos unas nuevas estructuras algebraicas: Keis y Quandles. Estas estructuras nos darán la oportunidad de analizar los polinomios desde otro punto de vista. El último de ellos, el quandle, es un invariante completo que estudiaremos en profundidad. Además, veremos cómo puede ser relacionado con el grupo fundamental de un nudo.

Abstract

In this paper we make an introduction to knot theory. After some definitions, we will study some of the many invariants associated to a knot and will see how important polynomials are to distinguish two non-equivalent knots. At the end, new algebraic structures will be introduced: Keis and Quandles. These structures bring us the opportunity to analyze polynomials from another point of view. The latter one, the quandle, is a complete invariant that we will study in depth. Moreover, we will see how it can be related with the fundamental group of the knot.

Índice general

1. Nudos, proyecciones y diagramas	1
1.1. Nota histórica	1
1.2. Nudos, proyecciones regulares y equivalencia	2
1.3. Movimientos de Reidemeister	7
2. Coloración de un nudo	9
2.1. 3-coloración	9
2.2. p -coloraciones. Determinante	11
2.3. Grupo abeliano asociado a un nudo	19
3. Polinomios asociados a nudos	23
3.1. Corchete de Kauffman	23
3.2. Polinomio de Jones	28
4. Keis y quandles	37
4.1. Keis y quandles	37
4.2. Kei y quandle fundamentales	39
4.3. Kei de Takasaki	42
4.4. Quandle de Alexander. Polinomio de Alexander.	42
4.5. Quandle de un grupo	46
4.5.1. Relación entre el grupo envolvente y el quandle de Alexander	46
4.5.2. Cálculo diferencial en grupos libres	49
4.6. Conexión con el grupo fundamental	51

Capítulo 1

Nudos, proyecciones y diagramas

1.1. Nota histórica

La teoría de nudos es un campo de estudio muy particular que involucra varias ramas de la matemática. Podemos fijar su origen en 1877, cuando el físico escocés Peter Guthrie Tait publicó su primera lista de nudos. Al intentar completar su trabajo se topó con un problema que matemáticos hasta nuestros días han intentado solucionar: saber cuándo dos nudos son equivalentes. Tait tenía claro que dos nudos eran equivalentes cuando se podía deformar uno hasta llegar a otro, pero era consciente de que esto no era en absoluto una tarea fácil. Esta cuestión comenzó a interesar a muchos matemáticos. En 1928, J. Alexander describía un método para asociar a cada proyección de un nudo un polinomio, que hoy en día se conoce como el polinomio de Alexander. Las proyecciones de dos nudos equivalentes no podían tener polinomios de Alexander diferentes, pero el recíproco no era cierto.

La teoría de nudos se estaba desarrollando y las herramientas matemáticas para poder estudiar el problema cada vez eran mayores. Así, en 1932, K. Reidemeister publicaba el primer libro dedicado enteramente a nudos, *Knotentheorie*. Este libro significó un antes y un después en la distinción de nudos. Otros grandes topólogos de principios del siglo XX se interesaron por la materia, como Henri Poincaré y Max Dehn. Este último consiguió relacionar los nudos con la teoría general de las 3-variedades y la teoría de grupos. En 1943, Mituhisa Takasaki introducía una nueva estructura algebraica llamada *kei*, que más tarde sería conocido como *quandle involutivo*. La idea principal de Takasaki fue encontrar una estructura algebraica no asociativa que consiguiese capturar la idea de reflexión en cuerpos geométricos. Esta idea sería generalizada por John Conway en 1959, cuyo polinomio consigue diferenciar los nudos que no tienen la propiedad de la quiralidad, es decir, que un diagrama y su imagen especular no representan nudos equivalentes.

Una versión mejorada del polinomio de Conway es el polinomio de Jones, descubierto por el matemático Vaughan Jones en 1984, que conseguía distinguir

una gran variedad de nudos que los polinomios de Alexander y Conway no podían. Jones no solo ganó la medalla Fields en el año 1990 sino que la comunidad matemática interesada en la teoría de nudos creció considerablemente después de su aportación. En 1992 se funda el *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, una revista dedicada completamente a la teoría de nudos. El avance en la teoría de nudos en el siglo XX culminaría con los invariantes de tipo finito asociados a un nudo o invariantes de Vassiliev, cuyo nombre proviene del matemático ruso Victor Vassiliev, que trabajó en la teoría de nudos a finales de los años 90. Louis Kauffman, profesor de Matemáticas en la Universidad de Illinois e investigador en activo, ha dedicado gran parte de su vida al estudio de la teoría de nudos, intentando completar al máximo el trabajo de sus predecesores.

1.2. Nudos, proyecciones regulares y equivalencia

Definición 1.2.1. Un **nudo poligonal combinatorio** o simplemente *n.p.c.* es una tupla $K^\# = (p_1, \dots, p_n)$ de puntos de \mathbb{R}^3 de tal modo que los segmentos $s_i = [p_i, p_{i+1}]$ (índices módulo n) cumplen las siguientes dos propiedades:

1. $s_i \cap s_j = \emptyset$ si $j \neq i, i-1, i+1$,
2. $s_i \cap s_{i+1} = \{p_{i+1}\}$.

El lugar geométrico del nudo $K^\#$ es $K = s_1 \cup \dots \cup s_n$. Los puntos $p \in K$ tales que para todo $\epsilon > 0$, $B_\epsilon \cap K$ no es un segmento abierto se dicen **vértices** del nudo. Muchas veces nos referiremos a K como el **nudo poligonal** (o nudo). Es importante que notemos que una tupla $K^\# = (p_1, \dots, p_n)$ y su tupla opuesta (p_n, \dots, p_1) determinan el mismo nudo poligonal K . Es decir, K no posee una orientación predeterminada. Para recuperar K basta con especificar la sucesión de vértices:

Lema 1.2.1. Sea $K^\# = (p_1, \dots, p_n)$ un nudo:

1. Si p es un vértice de $K^\#$ entonces $p \in \{p_1, \dots, p_n\}$.
2. Si p_{i_1}, \dots, p_{i_k} ($i_1 < \dots < i_k$) son los distintos vértices de $K^\#$ y $K_r^\# = (p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$, entonces $K_r^\#$ es un nudo poligonal y $K = K_r$.
3. Tres vértices consecutivos no están alineados.

Conviene observar también que, topológicamente, K es simplemente un encaje en \mathbb{R}^3 de una circunferencia.¹ De hecho, a partir de un cierto momento no dibujaremos los segmentos del nudo rectos sino que, por motivos estéticos nos permitiremos curvarlos y suavizar además los vértices.

Diremos que un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^3$ está centrado si $(0, 0, 0) \in C$. Sea π un plano centrado, y sea $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \pi$ la proyección ortogonal de \mathbb{R}^3 a π . Llamaremos **línea de proyección** a cualquier línea perpendicular al plano de proyección. Dado $C \subseteq \mathbb{R}^3$, la **sombra** de C es $\varphi(C)$. La sombra de un nudo K es $\varphi(K)$. Un

¹Recordar que un encaje $g: X \rightarrow Y$ es una aplicación continua tal que la aplicación inducida $g: X \rightarrow g(X)$ es un homeomorfismo.

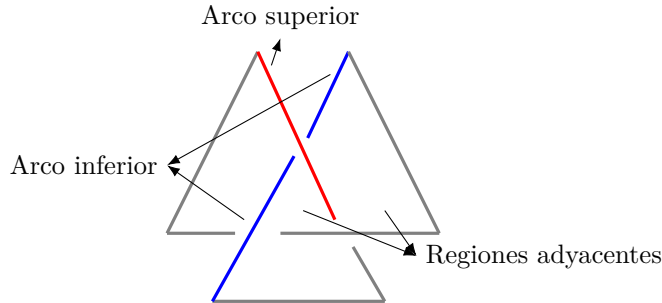
punto q de la sombra se dice *simple*, *doble*, *triple*, etc si $|\varphi^{-1}(q) \cap K| = 1, 2, 3$, etc. Se dice que el nudo K está en **posición regular** para la proyección φ , o que φ (o $\varphi(K)$) es una **proyección regular** para el nudo, si:

1. La sombra del nudo solamente tiene puntos simples o dobles, y el número de puntos dobles es finito.
2. Ningún punto doble de la sombra del nudo es la imagen de un vértice.

El siguiente teorema, que puede encontrarse en [3, p.7], asegura que siempre dispondremos de proyecciones regulares².

Teorema 1.2.1. *Dado un nudo, existen proyecciones para las cuales el nudo está en posición regular.*

Los puntos dobles de una proyección regular se llaman **cruces**. El **diagrama** de un nudo en posición regular respecto de alguna proyección consta de la sombra del nudo junto con algún dato en cada cruce que permita identificar la arista a la que pertenece el punto más cercano al plano de proyección que se proyecta en el cruce. Tradicionalmente, se interrumpe la sombra de esa arista en las inmediaciones del cruce. Al hacer esto, el diagrama queda dividido en componentes conexas, a las que se llama **arcos** del diagrama. Puesto que cada arco comienza y termina en un cruce, si hay cruces entonces hay tantos arcos como cruces. La arista que no se interrumpe se llama **arista superior**, mientras que la que sí se interrumpe se llama **arista inferior**. Igualmente se definen el **arco superior** y los **arcos inferiores** del diagrama en ese cruce.



Si S es la sombra de un nudo K sobre el plano π , a las componentes conexas $\pi \setminus S$ se les llaman **regiones**. Dos regiones son **adyacentes** si sus fronteras comparten algún segmento de alguna arista.

Proposición 1.2.1. *Las regiones determinadas por la sombra de un nudo pueden colorearse usando dos colores de modo que regiones adyacentes tengan diferentes colores.*

Demostración. A cada región R determinada por una sombra S vamos a asignarle un valor, que llamaremos $e(R)$. Dicho valor corresponderá al número de aristas, módulo 2, que corte una semirrecta cualquiera con origen un punto de

²La demostración consiste básicamente en analizar el lugar geométrico del conjunto de líneas de proyección para las cuales el nudo no está en posición regular y ver que su complementario es denso.

dicha región. No vamos a considerar cuando la recta es tangente a una arista ni cuando pasa por un cruce. Tenemos que ver que $e(R)$ no depende ni del punto de origen x considerado ni de la dirección de la semirrecta L . Hasta demostrar esto usaremos la notación $e(x, R)$.

Si tomamos una semirrecta cualquiera y hacemos un giro de ángulo muy pequeño respecto a nuestro punto x vemos que pueden ocurrir dos cosas: que se produzcan tangencias con la sombra o que pase por algún cruce. Pero al pasar por una tangencia lo que haces es variar el número de arcos cortados en dos, lo mismo que al pasar por un cruce. Por tanto, como estamos trabajando módulo 2, $e(x, L)$ es lo mismo que $e(x)$.

Dados dos puntos $x, y \in R$, podemos unirlos mediante una línea poligonal $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Si se elige como semirrecta que pasa por x_i la semirrecta que también pasa por x_{i+1} , puesto que la paridad no depende de la semirrecta que usemos, vemos que $e(x_i) = e(x_{i+1})$ con $i = 0, \dots, n-1$, por lo que $e(x) = e(y)$.

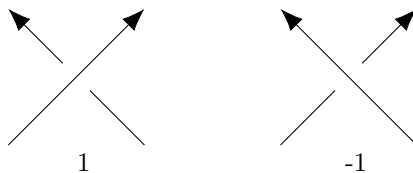
A la región R le asignamos el color $e(R)$. Si dos regiones son adyacentes entonces una semirrecta que cruce transversalmente a través del segmento común de alguna arista compartida por sus fronteras, proporciona diferentes paridades para ambas regiones. \square

Definición 1.2.2 (Nudo orientado). *Llamaremos nudo orientado a un nudo al que le prefijamos un sentido de recorrido de sus puntos. Todo nudo posee exactamente dos orientaciones posibles, que se corresponden con las dos posibles formas de dar la sucesión de los vértices.*



Si un nudo K tiene una orientación, al mismo nudo con la orientación opuesta lo llamaremos $-K$.

Dado un nudo orientado y una región de su sombra, para cada punto de esa región podemos tomar, al igual que en la demostración de la Proposición 1.2.1, una semirrecta que parta del punto y darle el sentido que se aleja del punto. En cada cruce transversal con la sombra del nudo sumamos un 1 o un -1 de acuerdo con la siguiente regla:



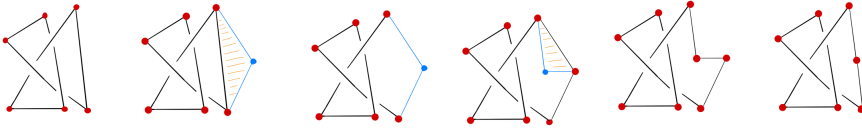
En los puntos de tangencia no sumamos nada, y en los cruces de la sombra sumamos dos veces, una por cada arista a la que corta la semirrecta. El mismo argumento que en la demostración anterior nos dice que el número resultante, al que se llama **índice** del punto, no depende del punto de la región ni de la semirrecta, sino solo de la región. Es interesante observar que un punto alejado

del nudo tendrá índice 0 y que cuando atravesamos una arista para pasar de una región a otra, el índice de los puntos de la región que queda a la derecha de la arista es menor en una unidad en comparación con el índice de los puntos de la región de la izquierda.

Los nudos poligonales se clasifican salvo equivalencia combinatoria. Dado un n.p.c. $K^\# = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i \in \{p_1, \dots, p_n\}$ y $p \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ tales que el triángulo $\triangle(p_i, p, p_{i+1})$ corte a K exactamente en $[p_i, p_{i+1}]$, diremos que los n.p.c. $K^\#$ y $(p_1, \dots, p_i, p, p_{i+1}, \dots, p_n)$ se obtienen uno a partir del otro mediante una **transformación elemental**.

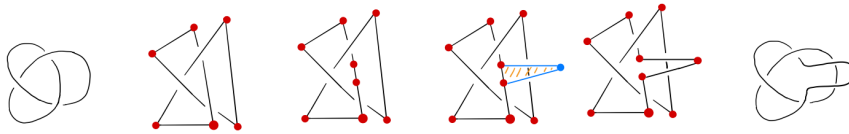
Definición 1.2.3. Dos n.p.c. $K^\#$ y $L^\#$ se dicen (combinatoriamente) **equivalentes**, y se denota por $K^\# \sim L^\#$, si existe una sucesión de n.p.c. $K^\# = K_0^\#, K_1^\#, \dots, K_l^\# = L^\#$ de modo que cada uno se obtiene a partir del anterior mediante una transformación elemental.

Las transformaciones elementales permiten añadir a $K^\#$ cualquier punto de los segmentos que no aparezca en $K^\#$:



Del mismo modo, dichas transformaciones permiten quitar puntos que no sean los vértices. Por tanto, $K^\#$ queda determinado salvo equivalencia combinatoria y salvo orientación por K . Diremos que dos nudos poligonales K y K' son **combinatoriamente equivalentes** si alguno de los n.p.c. que define a K es combinatoriamente equivalente a alguno que defina a K' . Extendemos esta relación a nudos orientados sin más que imponer que alguno de los n.p.c. que define a K y que induce la misma sucesión ordenada de vértices que la orientación de K debe ser combinatoriamente equivalente a algún n.p.c. que defina a K' y que induzca la misma sucesión ordenada de vértices que la orientación de K' .

Las transformaciones elementales también permiten deformar los nudos:



Definición 1.2.4. Dos encajes $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ son **isotópicos** si existe una aplicación continua $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$ con $F(x, s) = (f(x, s), s)$ y tal que $f(x, 0) = f_0(x)$, $f(x, 1) = f_1(x)$ y $f(-, s)$ es un encaje para todo $x \in X$.

y $s \in [0, 1]$. Los encajes se dicen **ambientalmente isotópicos** si existe una aplicación continua $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$, $H(y, s) = (h_s(y), s)$, de modo que h_0 sea la aplicación identidad de Y , $f_1 = h_1 \circ f_0$ y h_s es un homeomorfismo para todo $s \in [0, 1]$.

El concepto de isotopía ambiental recoge la idea de que no solamente $f_0(X)$ se deforma dentro de Y hasta $f_1(X)$ sino que esta deformación es motivada por una deformación de todo el espacio ambiente Y .

Se podría definir que dos nudos, vistos como encajes en \mathbb{R}^3 de circunferencias, son equivalentes si dichos encajes son ambientalmente isotópicos. Si los nudos poseen orientación entonces debe imponerse que la isotopía la preserve. Puede demostrarse [2, Proposition 1.10] que

Proposición 1.2.2. *Dos nudos poligonales son equivalentes si y solamente si son combinatoriamente equivalentes.*

En la práctica es más cómodo usar isotopías ambientales para deformar nudos.

Definición 1.2.5. *Un nudo se dice **invertible** si es equivalente al nudo que se obtiene al invertir la orientación que tenía este primero.*

Definición 1.2.6. *Sea K un nudo. Si tomamos un plano cualquiera del espacio que no corte al nudo K y hacemos una simetría del nudo respecto a ese plano, es decir, calculamos la imagen que tendría ese nudo en un espejo, obtenemos otro nudo al que llamaremos **imagen especular** de K . A este nudo lo denotaremos por K^* . Cuando un nudo no es equivalente a su imagen especular diremos que es **quiral** o que posee la propiedad de quiralidad. Si un nudo es equivalente a su imagen especular, lo llamaremos **aqiral**.*

Más adelante veremos la importancia que tiene la quiralidad en la teoría de nudos, ya que fue complicado conseguir un invariante tan potente que diferencie a un nudo quiral de su imagen especular.

Nuestro interés principal son los nudos, pero a la hora de estudiarlos nos aparece el concepto de enlace, por lo que necesitaremos su definición.

Definición 1.2.7. *La unión de n nudos poligonales disjuntos en \mathbb{R}^3 se llama **enlace poligonal de n componentes**. Por tanto, los nudos no son más que enlaces de una sola componente.*

Ejemplo 1.2.1 (Enlace Hopf). *Uno de los enlaces más conocidos es el llamado enlace de Hopf, llamado así por el matemático alemán Heinz Hopf, que es el enlace no trivial más simple que existe:*

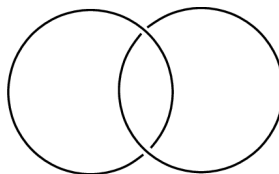


Figura 1.1: Enlace Hopf

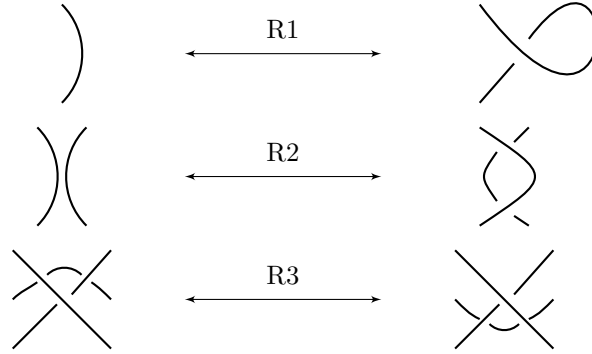


Figura 1.2: Movimientos de Reidemeister

1.3. Movimientos de Reidemeister

Queremos saber cuándo dos nudos son equivalentes, pero sería mucho más útil saber cuándo dos diagramas representan nudos equivalentes. Así, no será necesario trabajar con los nudos en \mathbb{R}^3 , sino simplemente con sus proyecciones. Este resultado se lo debemos a Kurt Reidemeister, quien, en 1927, descubrió los movimientos permitidos en un diagrama para que el nudo que representa siga siendo equivalente al primero. Por ello, hoy en día, estos movimientos llevan su nombre.

Una transformación elemental plana consiste en, apoyado un triángulo en el diagrama que solamente tenga en común con este último uno de sus lados, sustituir ese lado por la unión de los otros dos. Diremos que dos diagramas son **equivalentes** si uno se obtiene a partir del otro utilizando un número finito de transformaciones elementales planas y de movimientos de Reidemeister, los cuales detallamos en la Figura 1.2

El siguiente resultado es fundamental ya que permite el estudio de los nudos en términos de sus diagramas. Puesto que nuestro interés se centra en la exposición de algunos invariantes por equivalencia de los diagramas, la *demostración* no es tal sino más bien un boceto muy escueto de la misma.

Teorema 1.3.1. *Dos diagramas representan nudos equivalentes si y solamente si son equivalentes.*

Demostración. El diagrama de un nudo se obtiene al proyectar el nudo. Si despegamos un poquito los arcos superiores del plano de proyección tendremos un nudo equivalente al nudo original. Así, el diagrama determina al nudo salvo equivalencia. Las transformaciones elementales del diagrama se corresponden con transformaciones elementales del nudo. De igual modo, al aplicar los movimientos de Reidemeister a un diagrama obtenemos el diagrama de un nudo equivalente. Por tanto diagramas equivalentes representan nudos equivalentes.

Vamos a demostrar que si dos nudos son equivalentes entonces sus diagramas también lo son. Primero deberíamos comprobar que los diagramas D_1 y D_2

obtenidos a partir de dos proyecciones regulares de un mismo nudo son equivalentes. La idea es que podemos crear un camino continuo de líneas de proyección que pasa de la usada para D_1 a la usada para D_2 . Esto nos permite movernos desde D_1 a D_2 a través de una sucesión finita de diagramas tan *próximos* el uno al otro como queramos. Al movernos de de un diagrama a otro puede ocurrir que arcos que no se cortaban ahora sí que lo hagan o que se creen pequeños arcos nuevos. Eso crea las situaciones recogidas en la Figura 1.4 y que se pueden interpretar como una sucesión de movimientos de Reidemeister o bien como transformaciones elementales planas. Así, D_1 y D_2 son en realidad equivalentes.

Sean ahora K_1 y K_2 dos nudos equivalentes y sea D_1 un diagrama de K_1 . Hemos de demostrar que D_1 es equivalente a un diagrama de K_2 —cualquiera nos vale por el apartado anterior. Al ser los nudos equivalentes, podemos pasar del uno al otro mediante una sucesión finita de transformaciones elementales con la de la Figura 1.3.

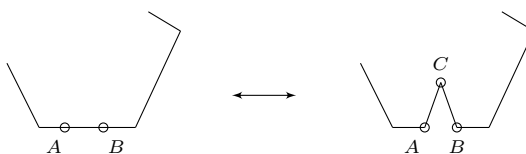


Figura 1.3: Transformacion elemental

Al proyectar el nuevo nudo es muy posible que aparezcan/desaparezcan numerosos cruces. La idea es fijarnos en la proyección del triángulo ABC y en todos los segmentos que al proyectarlos pasarán por su interior. Habrá posiblemente proyecciones de vértices, de cruces y de, simplemente, trozos de segmentos. En lugar de realizar toda la transformación elemental de golpe, podemos, alrededor de cada vértice y cruce que esté en el triángulo poner un triángulo más pequeño de modo que en ese triangulito solo aparezca ese problema. Después terminamos de rellenar el triángulo con triangulitos. En cada triangulito nos encontramos con alguna de las situaciones descritas por la Figura 1.3 o con transformaciones elementales planas. Así, como hemos visto en el caso de dos diagramas de un mismo nudo, los diagramas asociados en cada paso son todos equivalentes y podemos llegar desde D_1 a un diagrama para K_2 usando los movimientos de Reidemeister o transformaciones elementales planas. \square

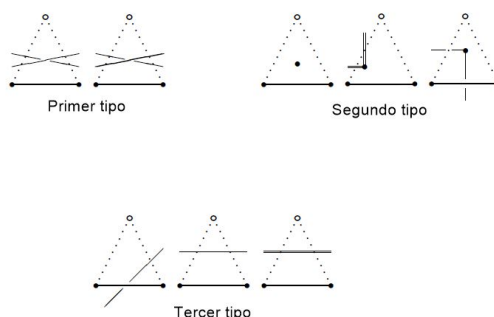


Figura 1.4: Tipos de triángulos pequeños

Capítulo 2

Coloración de un nudo

Después de haber visto qué ocurre con un nudo y su diagrama, debemos intentar resolver el gran problema que planteó Tait: ¿cómo podemos saber cuándo dos nudos son equivalentes? Para ello vamos a trabajar con los diagramas de los nudos y vamos a estudiar ciertas propiedades que tienen. A dichas propiedades las llamaremos **invariantes** del nudo. Si dos nudos no comparten los mismos invariantes, podemos asegurar que los nudos son diferentes.

Vamos a comenzar con los invariantes más sencillos de calcular y que, desafortunadamente, son los menos potentes.

2.1. 3-coloración

En esta sección trataremos la coloración de nudos siguiendo como base el texto de C. Livingston [6] pero completando las demostraciones.

Definición 2.1.1 (3-coloración). *Un diagrama D de un nudo K se dice 3-coloreable si cada arco de D puede ser identificado con un color: rojo (R), amarillo (Y) y azul (B), de modo que:*

- *Al menos se usan dos colores.*
- *Si en un cruce aparecen dos colores, entonces deben aparecer los tres.*

Esta idea es bastante clara, pero además podemos ver de forma sencilla que es un invariante del nudo.

Teorema 2.1.1 (La 3-coloración es un invariante). *Si un diagrama D de un nudo K es 3-coloreable, entonces todo diagrama D' de cualquier otro nudo K' equivalente a K también es 3-coloreable.*

Demostración. Aunque es más bonito el presentar la demostración usando los colores, sin embargo, más adelante generalizaremos esta demostración, así que para no repetirnos usaremos una notación menos atractiva. Los colores serán los elementos de \mathbb{Z}_3 . Al arco a le asociaremos una indeterminada x_a y a cada cruce le asociaremos una ecuación

$$2x_a - x_b - x_c = \bar{0}$$

donde a es el arco superior del cruce y b, c los inferiores. Como queremos resolverla en \mathbb{Z}_3 , la ecuación equivale a $x_a + x_b + x_c = \bar{0}$. Esta ecuación se cumple solo si o bien $x_a = x_b = x_c$ en \mathbb{Z}_3 o bien si x_a, x_b, x_c son los tres elementos distintos de \mathbb{Z}_3 . Así que la existencia de una 3-coloración equivale a que este sistema tenga alguna solución en \mathbb{Z}_3 de modo que los valores de las indeterminadas x_a no necesariamente sean todos iguales.

Obviamente, cambiar la numeración de los arcos o la de los cruces no afecta para nada a la existencia de este tipo de soluciones ya que a lo sumo permutaremos el papel que juegan las indeterminadas x_a .

Necesitamos comprobar que la existencia de este tipo de soluciones es invariante por los movimientos de Reidemeister. Distinguiremos cada uno de los tres posibles casos.

Movimiento R1. En este movimiento simplemente duplicamos una indeterminada, así que no afecta a la existencia de las soluciones buscadas.

$$\left(\begin{array}{c} x_i \\ \text{---} \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} x_i = x_j \\ \text{---} \\ x_k \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} x_i = x_j \\ 2x_i - x_j - x_k = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow x_i = x_j = x_k$$

Movimiento R2. En este caso duplicamos una de las indeterminadas ($x_l = x_j$) e introducimos otra que depende de las anteriores ($x_k = 2x_i - x_j$):

$$\left(\begin{array}{c} x_i \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_j \\ \text{---} \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} x_i \\ \text{---} \\ x_k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_j \\ \text{---} \\ x_l \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} 2x_i - x_j - x_k = 0 \\ 2x_i - x_k - x_l = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left. \begin{array}{l} x_l = x_j \\ 2x_k = 2x_i - x_j \end{array} \right\}$$

La existencia de las soluciones buscadas no cambia. Si existen para el diagrama en azul, existirán para el diagrama en verde. Recíprocamente, asumamos que existen para el diagrama en verde. En tal caso, quitando x_k, x_l tendremos una solución para el sistema correspondiente al diagrama en azul.

Movimiento R3. En este caso

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} x_i \quad x_j \\ \text{---} \quad \text{---} \\ x_k \quad x_m \\ \text{---} \quad \text{---} \\ x_i \end{array} & \longleftrightarrow & \begin{array}{c} x_i \quad x_j \\ \text{---} \quad \text{---} \\ x_q \quad x_m \\ \text{---} \quad \text{---} \\ x_l' \end{array} \\ \\ \left. \begin{array}{l} 2x_i - x_k - x_l = 0 \\ 2x_j - x_l - x_m = 0 \\ 2x_i - x_j - x_q = 0 \end{array} \right\} & & \left. \begin{array}{l} 2x_q - x_k - x_l' = 0 \\ 2x_i - x_m - x_l' = 0 \\ 2x_i - x_j - x_q = 0 \end{array} \right\} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_i - x_k = 2x_j - x_l \\ 2x_i - x_j - x_q = 0 \\ (x_l = 2x_i - x_k) \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} 2x_i - x_k = 2x_j - x_l \\ 2x_i - x_j - x_q = 0 \\ (x'_l = 2x_q - x_k) \end{array} \right\}$$

en las soluciones del sistema asociado al diagrama azul $x_l = 2x_i - x_j$ y los cruces implican la relación en rojo de las indeterminadas x_i, x_j, x_k, x_l . En el diagrama en verde las relaciones para estas indeterminadas son las mismas excepto que $x'_l = 2x_q - x_k$. Así, la existencia de soluciones para un sistema equivale a la existencia para el otro. Si todas las indeterminadas para el verde tuviesen obligatoriamente el mismo valor entonces también todas las indeterminadas del azul tendrían el mismo valor. Esto nos muestra que si hay soluciones cuyos valores no son todos iguales para el azul, también las habrá para el verde, y viceversa.

□

2.2. p -coloraciones. Determinante

Del mismo modo que hemos definido la 3-coloración podemos ahora definir una idea más general pero cuya esencia es la misma:

Definición 2.2.1 (Etiquetado módulo p). *Un diagrama D de un nudo K puede ser etiquetado módulo p , con p un primo, si a cada arco a se le puede asociar un entero $x_a \in \{0, \dots, p-1\}$, de tal forma que:*

1. $x_a \neq x_b$ para alguna pareja de arcos a, b .
2. En cada cruce se debe cumplir la relación $2x_a - x_b - x_c \equiv 0 \pmod{p}$, donde a es el arco superior, y b, c son los arcos inferiores.

Esto es lo mismo que asignar una ecuación $2x_a - x_b - x_c = 0$ a cada cruce y comprobar que existe alguna solución del sistema en \mathbb{Z}_p de modo que no todas las indeterminadas x_a deban ser iguales.

Para que la anterior definición tenga sentido es necesario que la existencia del etiquetado no dependa del diagrama que se use para representar al nudo. La demostración del Teorema 2.1.1 que hemos presentado prueba exactamente esto.

Habiendo asociado al diagrama de un nudo sistemas de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Z} , donde las ecuaciones son, como antes,

$$2x_a - x_b - x_c = 0 \tag{2.1}$$

podemos considerar la matriz A de coeficientes de cualquiera de estos sistemas. Aunque para un mismo nudo hay muchas de estas matrices, pues dependen del diagrama y de la ordenación de los arcos y de la ordenación de los cruces, en general llamaremos **matriz asociada al nudo** a cualquiera de ellas.

Definición 2.2.2 (Determinante de un nudo). *El determinante de un nudo K , que lo denotaremos por $\det(K)$, es el valor absoluto del determinante de cualquiera de los menores de orden $n-1$ de cualquier matriz de orden $n \times n$ asociada al nudo.*

En este punto no queda claro que el determinante solamente dependa de K y no de la matriz y del menor elegido. El siguiente lema de Álgebra lineal resultará muy útil.

Lema 2.2.1. *Si en una matriz cuadrada la suma de sus filas y la de sus columnas es siempre 0, entonces, al eliminar cualquier fila y cualquier columna, el determinante de la matriz resultante es el mismo independientemente de la fila y columna elegidas.*

Demostración. Sea A una matriz $n \times n$ cuyas filas y columnas sumen todas cero, y sea B una matriz $n \times n$ cuyas entradas sean todas 1. Podemos calcular el determinante de $A + B$ en términos del menor (i, j) de A de la siguiente forma:

1. A la fila i -ésima le sumamos el resto de filas de $A + B$. Como todas las filas de A suman 0, la i -ésima fila de $A + B$ tendrá una n en todas sus entradas.
2. A la columna j -ésima le sumamos el resto de columnas. Ahora, en la entrada (i, j) habrá un n^2 y todas las demás entradas de la columna j serán n . El resto de la matriz queda igual:

$$i \begin{pmatrix} & & & j & & & \\ & & & n & & & \\ & & & \vdots & & & \\ n & \dots & n & n^2 & n & \dots & n \\ & & & \vdots & & & \\ & & & n & & & \end{pmatrix}$$

3. Sacamos n de factor común en la i -ésima fila.
4. Restamos la i -ésima fila a las demás. En la entrada (i, j) habrá una n , pero las demás entradas de la columna j serán 0. Como hemos restado 1 a todas las filas, la matriz resultante tiene las mismas entradas que A exceptuando la fila i y la columna j .
5. Desarrollando por (i, j) tenemos que $\det(A + B) = n^2 \det(A_{ij})$ donde A_{ij} es el menor correspondiente al elemento (i, j) . Como el determinante de $A + B$ es siempre el mismo, $\det(A_{ij})$ es el mismo independientemente del i y el j que elijamos.

□

El lema se aplica a una matriz cuyas filas y columnas sumen cero. Por definición, las columnas de cualquier matriz asociada a un nudo suman cero. Pero no queda claro que esto sea cierto para las columnas. De hecho es falso en general.

Ejemplo 2.2.1 (Matriz asociada a un nudo). *Veamos dos ejemplos en los que podremos ver cómo se forma la matriz de un nudo y cómo no siempre las filas de la matriz van a sumar 0.*

1. Comenzamos con el nudo trébol:

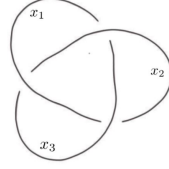


Figura 2.1: Trébol.

La matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Notar que da igual el orden en que se elijan los cruces o cómo se etiqueten los arcos, simplemente se obtendrá una matriz con las filas y columnas permutadas, por lo que las sumas de las filas y de las columnas será cero. En este ejemplo tan sencillo vemos que se cumple que todas las filas y columnas suman cero, pero ¿qué ocurriría si hubiésemos tenido el mismo nudo pero con diferente diagrama? Por ejemplo, uno al que le hayamos aplicado el segundo movimiento de Reidemeister.

2. Trébol modificado:

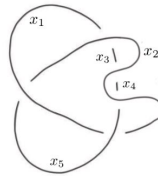


Figura 2.2: Trébol modificado con el segundo movimiento de Reidemeister.

Vemos que ahora una matriz asociada al nudo es:

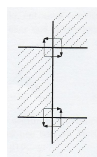
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que sus filas no suman 0, pero solo hay que multiplicar la cuarta fila por -1 para que satisfagan la propiedad. Multiplicar una o varias filas por -1 nos cambia el determinante, pero como lo que nos interesa es su valor absoluto, no hay ningún inconveniente en hacerlo.

Para poder demostrar que el determinante de un nudo no depende del menor elegido de la matriz A de orden $n \times n$ que hayamos asociado al nudo, vamos a

comprobar que podemos multiplicar las filas de A por ± 1 de modo que su suma sea nula. Así aplicando el Lema 2.2.1 podremos concluir que el valor absoluto de cualquiera de los menores de orden $n - 1$ de A es el mismo.

Para determinar qué filas multiplicaremos por -1 coloreamos las regiones de la sombra del nudo usando dos colores (claro y oscuro). Trazamos un pequeño cuadrado con centro en el cruce pero que tenga los vértices fuera de la sombra. Cada lado del cuadrado atraviesa transversalmente una arista de la sombra, pasando de una región a otra adyacente. En cada lado se fija el sentido que lleva del vértice en la región oscura al vértice en la región clara. Si el sentido del lado del cuadrado que atraviesa el arco superior no es el antihorario, la fila (o la relación (2.1)) correspondiente a ese cruce se multiplica por -1 . Observamos que el signo con el que un arco aparece en un cruce cambia en el cruce siguiente. Así, al sumar los coeficientes con los que aparece el generador correspondiente a ese arco en las distintas relaciones (2.1) obtenemos 0.

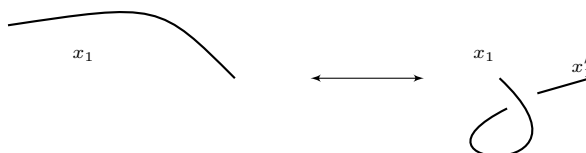


Con esta potente técnica vemos que el determinante del nudo no depende del menor. Obviamente tampoco depende de la numeración ni de los arcos ni de los cruces. Así que solamente queda por probar que no depende del diagrama.

Teorema 2.2.1 (El determinante es un invariante del nudo). *El determinante de un nudo no depende del etiquetado impuesto, de la elección del menor ni tampoco del diagrama del nudo que se haya tomado. Por lo tanto, el determinante es un invariante del nudo.*

Demostración. Ahora que sabemos que el determinante no depende del menor ni de la numeración de arcos y cruces, veamos que el determinante no depende del diagrama del nudo elegido, es decir, que el determinante se mantiene invariante por los movimientos de Reidemeister. Sea A la matriz asociada al nudo antes de aplicarle los movimientos.

Movimiento R1. Este movimiento añade una nueva fila (cruce) y una nueva columna (arco) a nuestra matriz A :



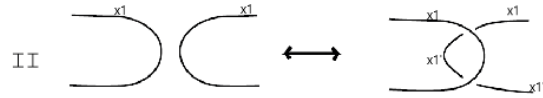
Una matriz A^* asociada al nuevo diagrama es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & & & \\ * & * & & A_{11} & \\ \vdots & \vdots & & & \\ * & * & & & \end{pmatrix}$$

donde A_{11} representa la matriz A a la que se le ha quitado la primera columna. El determinante del nudo a partir de A^* se puede calcular quitando por ejemplo la columna x_1 y la segunda fila de A^* . El valor absoluto del determinante de esa submatriz coincide con el de la submatriz de A obtenida al quitarle a A su primera fila y columna. Por tanto da igual usar A que A^* .

Movimiento R2. En este movimiento tenemos que considerar dos casos:

- 1) El primer caso es que los arcos sean iguales:

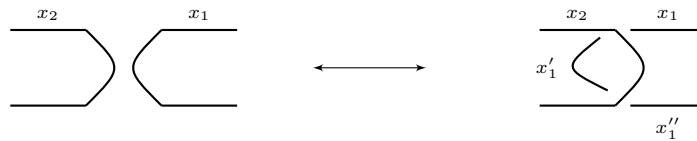


Cuya matriz A^* es:

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_1'' & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & * & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & A_{11} & \\ 0 & * & * & & & \end{pmatrix}$$

Usando el menor obtenido al quitar la tercera fila y columna de A^* y luego desarrollando dos veces usando la primera y segunda columna vemos que el determinante del nudo calculado a partir de A^* coincide con el calculado a partir de A .

- 2) En este segundo caso tenemos que los arcos que intervienen en el movimiento son distintos:

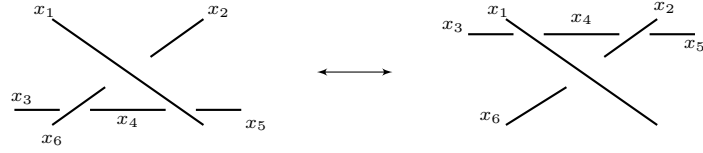


La matriz A^* queda ahora de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x''_1 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & * & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & A_{11} & & \\ 0 & * & * & & & & \end{pmatrix}$$

En este caso calculamos el determinante del nudo a partir de A^* quitando primero la tercera fila y cuarta columna. Después sumamos la segunda y tercera columna para que en la tercera columna queden dos -1 y la primera columna de A . Le restamos la primera columna para eliminar los -1 . Desarrollamos dos veces usando la primera y segunda fila. La submatriz que nos quedará coincidirá con la de A tras quitarle la primera fila y segunda columna. Por tanto el determinante del nudo calculado a partir de A^* coincide con el calculado a partir de A .

Movimiento R3. Este es un caso muchos más complejo debido a que distintos arcos pueden ser iguales. La figura representa la situación en la que todos son distintos. El resto de casos es similar.



En este caso unas posibles matrices serían, de acuerdo a la numeración x_1, x_2, x_3, \dots de las columnas,

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & \\ \hline & & A_1 & & & & A_2 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \mathbf{0} \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & \\ \hline & & A_1 & & & & A_2 \end{array} \right)$$

Es importante observar que la columna correspondiente a x_4 en A_1 es nula ya que x_4 solamente cruza a x_1 y a x_6 en el primer diagrama y a x_1 y x_2 en el segundo. Para calcular el determinante debemos eliminar una fila y una columna. En ambos casos elegimos la cuarta fila y la sexta columna.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & \\ \hline & B_1 & & & & B_2 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & \\ \hline & B_1 & & & & B_2 \end{array} \right)$$

Operamos las primeras tres filas para calcular el valor absoluto de los determi-

nantes. Podemos cambiar estas matrices por

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & \\ \hline & & & B_1 & & B_2 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & \\ \hline & & & B_1 & & B_2 \end{array} \right)$$

Puesto que la columna de B_1 correspondiente a x_4 en B_1 es nula, en la matriz de la derecha podemos sumarle a la segunda columna la cuarta, obteniendo la matriz de la izquierda. Por tanto, el valor absoluto de los determinantes de ambas matrices coincide. \square

Ya sabemos que el determinante es un invariante del nudo, pero sería interesante saber si la existencia de p -coloraciones es también un invariante. El siguiente resultado nos dice que sí.

Teorema 2.2.2 (Relación entre el determinante y la p -coloración). *Sea K un nudo y p un número primo. K es p -coloreable si y solo si p divide a $\det(K)$.*

Demostración. El nudo admite una p -coloración si y solamente si el sistema de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Z}_p determinado por cualquier matriz A (vista con entradas en \mathbb{Z}_p) del nudo tiene alguna solución no múltiplo de la solución $(\bar{1}, \dots, \bar{1})$. Podemos asumir que tanto las filas como las columnas de A suman cero, así que el rango de A es a lo sumo $n - 1$. El rango de A es $n - 1$ si y solamente si la \mathbb{Z}_p -dimensión del espacio de soluciones del sistema es 1, lo que equivale a decir que todas las soluciones son múltiplo de $(\bar{1}, \dots, \bar{1})$. Así pues, $\det(K) \not\equiv 0 \pmod{p}$ si y solamente si K no es p -coloreable. La negación de esta afirmación conduce al resultado. \square

Ejemplo 2.2.2. *Comencemos con el trébol, cuya matriz ya teníamos calculada:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

En este ejemplo se podría pensar que el único primo que puede colorear al trébol era el 3, ya que tiene tres arcos solamente.

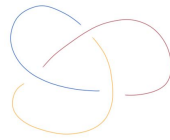
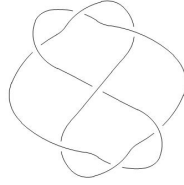


Figura 2.3: Trébol coloreado.

En casos muy sencillos se ve fácil pero, ¿qué ocurre cuando tenemos un nudo más complicado?

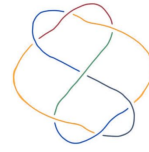
Ejemplo 2.2.3. *Vamos a ver cómo podemos colorear el nudo 7_4 :*

Figura 2.4: Nudo 7_4

Calculamos su matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eliminamos una fila y una columna y calculamos su determinante. Obtenemos 15, por tanto, este nudo debe poder colorearse con 3 y con 5 colores. Veámoslo:

Figura 2.5: Nudo 7_4 con 3 coloresFigura 2.6: Nudo 7_4 con 5 colores

Se podría caer fácilmente en la tentación de pensar que un nudo con un número primo de cruces debe, necesariamente, poder colorearse con ese número de colores. Veamos si se cumplen las condiciones de la definición 4.1. La primera condición es obvio que sí, así que pasemos a la segunda:

$$\begin{array}{ccccccc} -x_1 & -x_2 & & +2x_4 & & & \equiv 0 \pmod{7} \\ 2x_1 & & & -x_4 & -x_5 & & \equiv 0 \pmod{7} \\ -x_1 & & & & +2x_5 & -x_7 & \equiv 0 \pmod{7} \\ & 2x_2 & & & -x_5 & -x_6 & \equiv 0 \pmod{7} \\ & & -x_3 & -x_4 & & +2x_6 & \equiv 0 \pmod{7} \\ & & 2x_3 & & & -x_6 & -x_7 \equiv 0 \pmod{7} \end{array}$$

Fácilmente vemos que la solución es:

$$x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv x_5 \equiv x_6 \equiv x_7$$

por lo que vemos que un nudo de 7 arcos puede no ser 7-coloreable.

2.3. Grupo abeliano asociado a un nudo

En realidad, en el estudio de p -coloraciones, o en general en el estudio del determinante del nudo, hemos desaprovechado muchísima información, y eso se traduce en que quizás podríamos haber logrado un mejor invariante para el nudo.

En lugar de tratar las relaciones del tipo $2x_a - x_b - x_c = 0$ como si fuesen ecuaciones a resolver en un cuerpo \mathbb{Z}_p lo que vamos a hacer es tratar los elementos x_a como generadores de un grupo abeliano (\mathbb{Z} -módulo) y las expresiones $2x_a - x_b - x_c = 0$ como las relaciones entre esos generadores. El grupo abeliano con estos generadores y estas relaciones lo denotaremos por $\text{Col}^+(K)$ o simplemente Col^+ . En el Anexo pueden consultarse los rudimentos acerca de grupos abelianos, y en general de módulos, que necesitaremos.

El problema de si $\text{Col}^+(K)$ es un invariante del nudo lo resuelve muy fácilmente el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1. *Sea K un nudo. Se tiene que la clase de isomorfía del grupo abeliano $\text{Col}^+(K)$ no depende ni de la numeración de arcos y cruces ni del diagrama para K usado.*

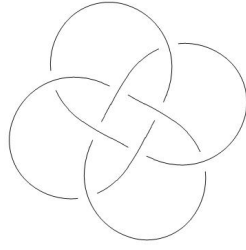
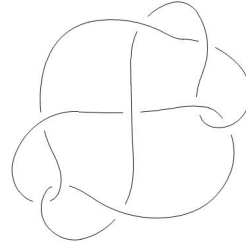
Demostración. Utilizar otra numeración de arcos es simplemente cambiar el nombre de los generadores, por lo que no cambia la clase de isomorfía. Cambiar la numeración de cruces no cambia al grupo ya que es simplemente escribir las relaciones en otro orden.

Toca examinar qué ocurre cuando se modifica el diagrama por los movimientos de Reidemeister. La demostración que hemos presentado del Teorema 2.1.1 muestra que estos movimientos simplemente añaden o quitan generadores expresables en términos del resto, por lo que no afectan para nada al grupo abeliano. \square

La matriz A asociada al nudo que hemos empleado para describir el determinante es justamente la matriz que expresa las relaciones de los generadores $\{x_a \mid a \text{ arco}\}$ de $\text{Col}^+(K)$. Es natural examinar si la invarianza de la clase de isomorfía de $\text{Col}^+(K)$ conduce a la del determinante de K , lo que da otra demostración alternativa del Teorema 2.2.1, o si proporciona más invariantes.

Un grupo abeliano finitamente generado queda clasificado, salvo isomorfía, por su rango y su factores invariantes, los cuales son invariantes por isomorfía. Los factores invariantes describen la estructura del subgrupo de torsión. El rango clasifica al grupo abeliano libre obtenido al realizar el cociente por el subgrupo de torsión. Tanto el rango como los factores invariantes pueden calcularse mediante transformaciones elementales de la matriz de relaciones A del grupo. Veamos si estos invariantes son útiles.

Ejemplo 2.3.1. *Consideremos los nudos 8_{18} y 9_{23} :*

Figura 2.7: Nudo 8_{18} Figura 2.8: Nudo 9_{23}

Estos dos nudos no son equivalentes, pero el determinante es un invariante tan débil que es incapaz de diferenciarlos: ambos tienen determinante 45. Pero si ahora tomamos sus matrices y las diagonalizamos en \mathbb{Z} para encontrar los divisores elementales de los correspondientes grupos abelianos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

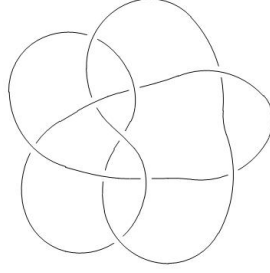
Así pues, el grupo $\text{Col}^+(8_{18})$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15}$. Para el nudo 9_{23} tenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto prueba que $\text{Col}^+(9_{23})$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{45}$. Como los divisores elementales de ambos grupos no coinciden, los grupos abelianos correspondientes no pueden ser isomorfos. Esto prueba que el nudo 8_{18} y el 9_{23} no son equivalentes.

Como vemos, clasificar el grupo abeliano Col^+ asociado al nudo es un invariante más potente que el determinante, pero falla a la hora de distinguir nudos muy distintos.

Ejemplo 2.3.2. *Se sabe que el nudo 10_{164}*

Figura 2.9: Nudo 10_{164}

no es equivalente al 9_{23} . Sin embargo los grupos abelianos asociados son isomorfos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El grupo abeliano $\text{Col}^+(K)$ es un invariante más potente que $\det(K)$.

Proposición 2.3.1. *El determinante de K es el producto de los factores invariantes de $\text{Col}^+(K)$.*

Demostración. Dado un nudo K y un diagrama con n arcos consideramos el subgrupo

$$\text{Col}(K) := \left\{ \sum_{a \text{ arco}} \alpha_a x_a \in \text{Col}^+(K) \mid \sum \alpha_a = 0 \right\},$$

que está bien definido ya que la suma de los coeficientes en cada relación que define a $\text{Col}^+(K)$ es 0.

Fijando un generador cualquiera x_e , observamos que $\text{Col}^+(K) = \mathbb{Z}x_e \oplus \text{Col}(K)$ ya que $\mathbb{Z}x_e \cap \text{Col}(K) = 0$ y $\text{Col}^+(K) = \mathbb{Z}x_e + \text{Col}(K)$. El \mathbb{Z} -submódulo $\mathbb{Z}x_e$ es libre, así que la única diferencia entre $\text{Col}(K)$ y $\text{Col}^+(K)$ está en su rango, siendo el de $\text{Col}(K)$ una unidad menor.

$\text{Col}(K)$ está generado por los elementos $x_a - x_e$, donde a recorre los arcos $\neq e$. Las relaciones $2x_a - x_b - x_c$ para los generadores de $\text{Col}^+(K)$ se corresponden con relaciones $2(x_a - x_e) - (x_b - x_e) - (x_c - x_e)$ para los generadores de $\text{Col}(K)$. Así, una matriz que represente estas relaciones puede obtenerse a partir de A quitando la columna correspondiente a x_e . También podemos quitar una fila ya que, salvo signo, sabemos que las filas de A suman cero. Así pues, el determinante de la matriz de relaciones para $\text{Col}(K)$ es, salvo signo, el determinante de K . Ahora bien, el determinante de la matriz de relaciones es, salvo signo, el producto de los factores invariantes. \square

El grupo $\text{Col}(K)$ que acabamos de introducir en la demostración anterior proporciona una forma alternativa de interpretar las coloraciones. Encontrar una p -coloración del nudo K es lo mismo que encontrar valores para x_a de modo que se cumplan las relaciones que definen a $\text{Col}^+(K)$ y de modo que haya al menos dos valores diferentes (i.e. que al sustituir en los elementos de $\text{Col}(K)$ no obtengamos cero. Es decir, **una p -coloración es exactamente lo mismo que un homomorfismo no nulo $\text{Col}(K) \rightarrow \mathbb{Z}_p$ como grupos abelianos**. El número de tales homomorfismos (coloraciones) es un invariante de $\text{Col}(K)$, por lo que también lo es del nudo.

Volveremos a esta idea cuando en lugar de colorear mediante escalares en un cuerpo finito coloreemos mediante elementos de ciertas estructuras algebraicas asociadas al nudo.

Capítulo 3

Polinomios asociados a nudos

Como hemos visto en las secciones anteriores, un invariante numérico ofrece muy poca información acerca del nudo. En esta sección nos vamos a centrar en los diferentes polinomios que podemos asociarle a un nudo. Una excelente referencia para este tema es el libro de V. Manturov [7].

3.1. Corchete de Kauffman

Vamos a denotar al corchete de Kauffman de un enlace K como $\langle K \rangle$. Esta expresión terminará siendo un polinomio de Laurent que cumple los siguientes axiomas, llamados comúnmente también **reglas o axiomas de Kauffman**:

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2. $\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array} \rangle + B \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagdown \\ \diagup \diagup \end{array} \rangle$
3. $\langle L \cup \bigcirc \rangle = C \langle L \rangle$

El primer axioma nos dice que el corchete del nudo trivial vale 1. En el segundo tenemos que el corchete de un enlace es una combinación lineal de los corchetes generados al deshacer uno de sus cruces de las dos formas posibles. El último axioma muestra qué ocurre cuando a un enlace L cualquiera se le une el nudo trivial, y vemos que es el mismo corchete que tenía L , pero multiplicado por un cierto elemento C . Por ahora A, B, C son simplemente parámetros que más adelante perfilaremos.

Para que este polinomio nos sea útil debe ser invariante por los movimientos de Reidemeister. Por ello hemos dejado las A, B y C sin determinar, ya que al forzar que estos axiomas sean invariantes por los tres movimientos, obtendremos su valor. Comencemos:

Movimiento R2.

$$\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c} \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array} \rangle + \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagdown \\ \diagup \diagup \end{array} \rangle$$

Utilizando el segundo axioma tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 2} \rangle + B \langle \text{Diagram 3} \rangle \stackrel{A2}{=} \\ &\stackrel{A2}{=} A \left(A \langle \text{Diagram 4} \rangle + B \langle \text{Diagram 5} \rangle \right) + B \left(A \langle \text{Diagram 6} \rangle + B \langle \text{Diagram 7} \rangle \right) \end{aligned}$$

Vemos ahora que podemos utilizar el tercer axioma, por tanto la expresión de arriba se queda como:

$$\begin{aligned} &A \left(A \langle \text{Diagram 4} \rangle + BC \langle \text{Diagram 7} \rangle \right) + B \left(A \langle \text{Diagram 6} \rangle + B \langle \text{Diagram 7} \rangle \right) = \\ &= A^2 \langle \text{Diagram 4} \rangle + ABC \langle \text{Diagram 7} \rangle + BA \langle \text{Diagram 6} \rangle + B^2 \langle \text{Diagram 7} \rangle = \\ &= (A^2 + ABC + B^2) \langle \text{Diagram 7} \rangle + BA \langle \text{Diagram 6} \rangle \stackrel{R2}{=} \langle \text{Diagram 6} \rangle \end{aligned}$$

Esto nos fuerza a que:

$$\begin{aligned} A^2 + ABC + B^2 &= 0 \\ BA &= 1 \end{aligned}$$

De donde obtenemos que:

$$\begin{aligned} B &= A^{-1} \\ C &= -A^2 - A^{-2} \end{aligned}$$

Ahora las tres relaciones solo dependen de A y, por tanto, el corchete también:

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2. $\langle \text{Diagram 8} \rangle = A \langle \text{Diagram 9} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 10} \rangle$
3. $\langle L \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$

Movimiento R3.

$$\langle \text{Diagram 11} \rangle = \langle \text{Diagram 12} \rangle$$

$$\langle \text{Diagram 11} \rangle \stackrel{A2}{=} A \langle \text{Diagram 13} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 14} \rangle \stackrel{R2}{=} A \langle \text{Diagram 15} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 16} \rangle = \langle \text{Diagram 17} \rangle$$

En este caso, aplicando dos veces el segundo movimiento de Reidemeister al primer nudo y haciendo un movimiento que no altera el corchete en el segundo, vemos que la igualdad de corchetes es inmediata.

Ahora queda ver el primer movimiento de Reidemeister, pero antes de ello una pequeña observación:

$$\langle \bigcirc \cup \bigcirc \rangle = -(A^2 + A^{-2}) \langle \bigcirc \rangle = -(A^2 + A^{-2})$$

Veamos qué ocurre con el primer movimiento:

Movimiento R1.

$$\begin{aligned} \langle \text{diagrama} \rangle &= \langle \text{diagrama} \rangle = \langle \text{diagrama} \rangle \\ \langle \text{diagrama} \rangle &\stackrel{A^2}{=} A \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle \stackrel{A^3}{=} \end{aligned}$$

$$\stackrel{A^3}{=} -A(A^2 + A^{-2}) \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle = (-A^3 - A^{-1} + A^1) \langle \text{diagrama} \rangle = -A^3 \langle \text{diagrama} \rangle$$

Y en el otro caso tenemos:

$$\langle \text{diagrama} \rangle \stackrel{A^2}{=} A \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle \stackrel{A^3}{=}$$

$$\stackrel{A^3}{=} A \langle \text{diagrama} \rangle - A^{-1}(A^2 + A^{-2}) \langle \text{diagrama} \rangle = (A - A - A^{-3}) \langle \text{diagrama} \rangle = -A^{-3} \langle \text{diagrama} \rangle$$

En ambos casos tenemos que el corchete deseado está multiplicando por una constante que no queremos, en uno $-A^3$ y en el otro $-A^{-3}$. ¿Podemos corregirlo? Para responder a esta pregunta debemos introducir un nuevo concepto.

Definición 3.1.1 (Retorcimiento). *Sea L un enlace orientado. Cada cruce de L puede ser de dos tipos:*

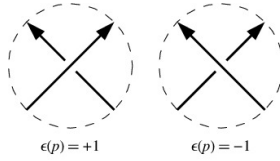


Figura 3.1: Asignación de $\epsilon(p)$ dependiendo del tipo de cruce

A cada cruce p del enlace L se le asigna un 1 o un -1 tal y como indica la figura que tenemos arriba. Llamaremos **retorcimiento** del enlace o, más comúnmente llamado por su palabra anglosajona, **writhe** del enlace a:

$$\omega(L) = \sum_{p \in C(L)} \epsilon(p)$$

donde $C(L)$ denota al conjunto de cruces del enlace L .

Obviamente, el writhe no es invariante por el primer movimiento de Reidemeister, así que realmente depende del diagrama. Sin embargo, es esto lo que nos va a ser de mucha utilidad.

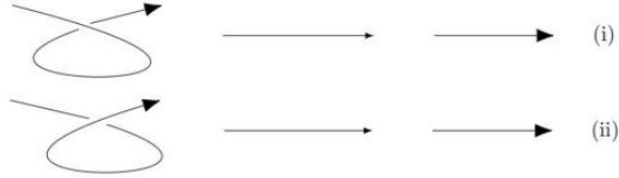
Definición 3.1.2. *Se define el corchete normalizado de Kauffman como:*

$$X(L) = (-A^3)^{-\omega(L)} \langle L \rangle$$

El corchete normalizado es un polinomio de Laurent en la indeterminada A ya que se permiten monomios de grado negativo.

Proposición 3.1.1. *El corchete normalizado de Kauffman es un invariante del nudo.*

Demostración. Como tanto $\langle L \rangle$ como $\omega(L)$ no se ven afectados por los movimientos 2 y 3 de Reidemeister, solo tenemos que ver qué ocurre con el primero:



Distingamos los dos casos:

1. Como este cruce, ρ , hace que $\epsilon(\rho) = +1$, al deshacerlo tendremos que $\omega(L') = \omega(L) + 1$, así que tenemos:

$$\begin{aligned} X(L') &= (-A^3)^{-\omega(L')} \langle L' \rangle = (-A^3)^{-(\omega(L)+1)} (-A^3) \langle L \rangle = \\ &= (-A^3)^{-\omega(L)} \langle L \rangle = X(L). \end{aligned}$$

2. Aquí sucede al revés. Por ser el cruce diferente, $\omega(L') = \omega(L) - 1$. Así que

$$\begin{aligned} X(L') &= (-A^3)^{-\omega(L')} \langle L' \rangle = (-A^3)^{-(\omega(L)-1)} (-A^{-3}) \langle L \rangle = \\ &= (-A^3)^{-\omega(L)} \langle L \rangle = X(L). \end{aligned}$$

□

Antes de continuar con más polinomios, veamos un ejemplo de cómo calcular este polinomio $X(L)$:

Ejemplo 3.1.1. *Vamos a calcular el corchete del nudo 4_1 , al que llamaremos K .*

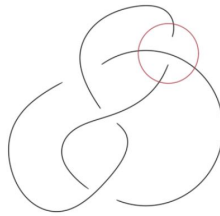
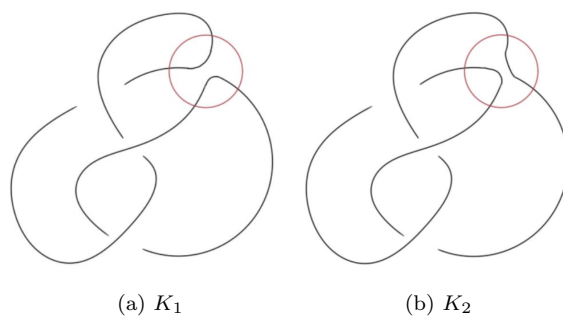


Figura 3.2: K

Deshaciendo el cruce indicado obtenemos:



Si nos fijamos bien, aplicando el primer movimiento de Reidemeister, K_1 es un enlace Hopf

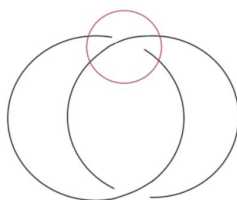
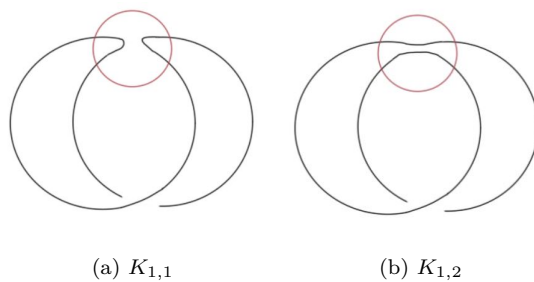


Figura 3.3: Nudo K_1

que se descompone como



Nuestro nudo K_2 :

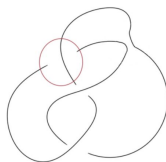
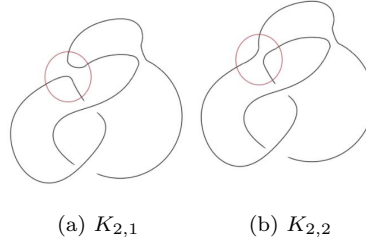


Figura 3.4: Nudo K_2

se descompone como



donde, si nos fijamos bien, el primero vuelve a ser un enlace Hopf y el segundo es el nudo trivial al que se le ha aplicado el primer movimiento de Reidemeister dos veces.

Por tanto, con un poco de orden, y utilizando repetidamente el segundo axioma de Kauffman, podemos ir calculando el corchete de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= A \langle K_1 \rangle + A^{-1} \langle K_2 \rangle = \\ &A (A \langle K_{1,1} \rangle + A^{-1} \langle K_{1,2} \rangle) + A^{-1} (A \langle K_{2,1} \rangle + A^{-1} \langle K_{2,2} \rangle) \end{aligned}$$

Si recordamos lo que hemos dicho antes, el nudo $K_{2,1}$ es el mismo que el K_1 entonces, sustituyendo $K_{2,1}$ por la descomposición que hicimos para K_1 , obtenemos

$$A (A \langle K_{1,1} \rangle + A^{-1} \langle K_{1,2} \rangle) + A^{-1} (A (A \langle K_{1,1} \rangle + A^{-1} \langle K_{1,2} \rangle) + A^{-1} \langle K_{2,2} \rangle)$$

y todos los nudos que aparecen en esta expresión son nudos triviales, es decir, su corchete es 1. Así,

$$\langle K \rangle = A(A + A^{-1}) + A^{-1}(A(A + A^{-1}) + A^{-1})$$

Finalmente, simplificando obtenemos

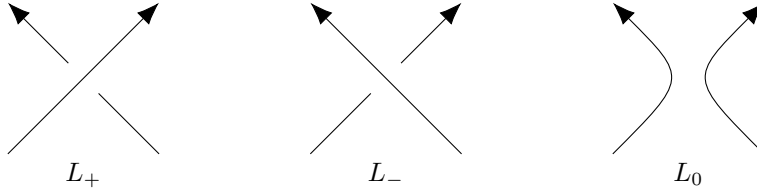
$$\langle K \rangle = A^2 + A + A^{-1} + A^{-2} + 1$$

3.2. Polinomio de Jones

Si reemplazamos la variable A en el polinomio anterior por $t^{-\frac{1}{4}}$ obtenemos el polinomio que descubrió Vaughan Jones en 1984, denotado como $V(L)$ (o $V(t)$ si sabemos con qué enlace estamos trabajando). Se trata de un polinomio de Laurent en la indeterminada $t^{1/2}$ con coeficientes en \mathbb{Z} , es decir, un elemento del anillo $\mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}]$. Hemos visto que utilizando los axiomas de Kauffman podemos ir deshaciendo el enlace o nudo, en una estructura de árbol, hasta llegar a la unión disjunta de nudos triviales. Pero no estábamos considerando la orientación del nudo. El polinomio de Jones, en cambio, está mejor enfocado.

Para poder calcularlo vamos a probar una relación recurrente muy potente llamada relación **skein**.

Primero definimos tres diagramas: L_+ , L_- y L_0 . Estos diagramas representan los tres distintos casos que se pueden dar con dos segmentos del enlace en un cruce:



El primero es que el cruce sea positivo, el segundo es que el cruce sea negativo y el tercero es que no se crucen. Por tanto, cuando tengamos el diagrama de un enlace, seleccionaremos cualquiera de sus cruces y lo identificaremos con L_+ o L_- , dependiendo del tipo de cruce, y lo modificamos para conseguir el resto. Podemos ver en las figuras 3.5, 3.6 y 3.7 qué ocurre con el trébol.

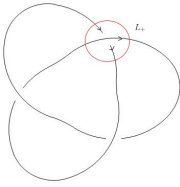


Figura 3.5: Diagrama original del 3_1

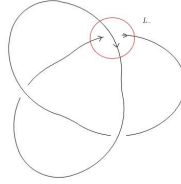


Figura 3.6: Modificación para conseguir el diagrama L_+

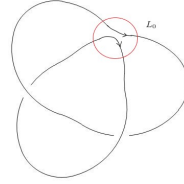


Figura 3.7: Modificación para conseguir el diagrama L_0

Cada uno de estos tres nudos tendrá su propio polinomio asociado.

Encontraremos una relación entre estos tres polinomios, es decir, una expresión

$$F(L_+(x), L_-(x), L_0(x), x) = 0$$

Entender estas relaciones implica entender cómo se forman gran parte de los polinomios asociados a nudos.

Teorema 3.2.1. *Si L_+ , L_- y L_0 son los nudos (o enlaces) orientados con diagramas idénticos excepto en una región en la cual difieren en la forma que hemos mostrado arriba, entonces*

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})V(L_0) = 0 \quad (3.1)$$

Demostración. Sustituimos los polinomios de Jones de por su valor, es decir:

$$V(L) = (-A^3)^{-\omega(L)} \langle L \rangle$$

Tenemos

$$\begin{aligned} t^{-1} [(-A^3)^{-\omega(\text{diagrama } L_+)} \langle \text{diagrama } L_+ \rangle]_{t^{1/2}=A^{-2}} - t [(-A^3)^{-\omega(\text{diagrama } L_-)} \langle \text{diagrama } L_- \rangle]_{t^{1/2}=A^{-2}} \\ + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) [(-A^3)^{-\omega(\text{diagrama } L_0)} \langle \text{diagrama } L_0 \rangle]_{t^{1/2}=A^{-2}} = 0. \end{aligned}$$

donde $[f(b)]_{a=b}$ indica que en $f(b)$ sustituimos b por a , $\nearrow \nwarrow$ denota al nudo L_+ , $\nwarrow \nearrow$ al L_- y $\nearrow \nearrow$ al L_0 .

Haciendo la sustitución que se indica tenemos que:

$$A^4 [(-A^3)^{-3\omega(\text{diagrama})} \langle \text{diagrama} \rangle] - A^{-4} [(-A^3)^{-3\omega(\text{diagrama})} \langle \text{diagrama} \rangle] + \\ + (A^2 - A^{-2}) [(-A^3)^{-3\omega(\text{diagrama})} \langle \text{diagrama} \rangle] = 0$$

Como $\omega(\text{diagrama}) = \omega(\text{diagrama}) + 1$ y $\omega(\text{diagrama}) = \omega(\text{diagrama}) - 1$, tenemos que:

$$A^4 [(-A)^{-3\omega(\text{diagrama})-3} \langle \text{diagrama} \rangle] - A^{-4} [(-A)^{-3\omega(\text{diagrama})+1} \langle \text{diagrama} \rangle] + \\ + (A^2 - A^{-2}) [(-A^3)^{-3\omega(\text{diagrama})} \langle \text{diagrama} \rangle]_{t^{1/2}=A^{-2}} = 0$$

Simplificando un poco:

$$(-A^3)^{-3\omega(\text{diagrama})} [(-A) \langle \text{diagrama} \rangle] - (-A^3)^{-3\omega(\text{diagrama})} [-A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle] + \\ + (-A^3)^{-3\omega(\text{diagrama})} (A^2 - A^{-2}) \langle \text{diagrama} \rangle = 0$$

o equivalentemente,

$$-A \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle + (A^2 - A^{-2}) \langle \text{diagrama} \rangle = 0$$

Recordamos que:

$$\begin{aligned} \langle \text{diagrama} \rangle &= A \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle \\ \langle \text{diagrama} \rangle &= A \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle \end{aligned}$$

Por tanto, si sustituimos esto en la última ecuación:

$$\begin{aligned} -A [\langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle] + A^{-1} [A \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle] = \\ = -A^2 \langle \text{diagrama} \rangle - \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-2} \langle \text{diagrama} \rangle + A^2 \langle \text{diagrama} \rangle - A^{-2} \langle \text{diagrama} \rangle = 0 \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. \square

Vamos a ver cómo calcular el polinomio de Jones de algunos nudos, pero antes, vamos a calcular el polinomio de un enlace que nos será muy útil: el enlace Hopf.

Ejemplo 3.2.1. *En un solo paso podemos descomponer el enlace Hopf. L_0 es el nudo trivial, mientras que L_+ es la unión disjunta de dos nudos triviales.*

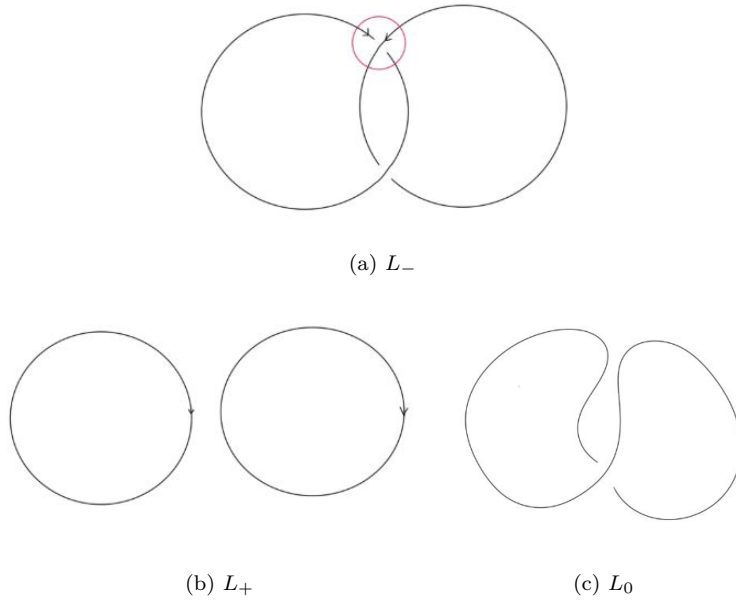


Figura 3.8: Descomposición para conseguir el polinomio de Jones.

Como

$$\langle L \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle L \rangle.$$

tenemos

$$\langle L \cup \bigcirc \rangle = (-t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})\langle L \rangle.$$

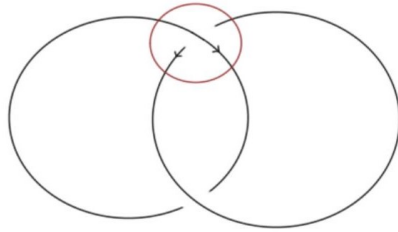
Sabiendo que el polinomio del nudo trivial es 1, podemos concluir el cálculo:

$$t^{-1}(-t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) - tV(L_-) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})(1) = 0$$

lo que despejando $V(L_-)$ conduce a

$$V(L) = V(L_-) = -t^{-\frac{5}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Es muy importante notar que si tenemos la imagen especular del enlace de Hopf:



la descomposición es la misma de antes, pero nuestro enlace ahora representa a L_+ , por ser ahora el cruce positivo, por tanto

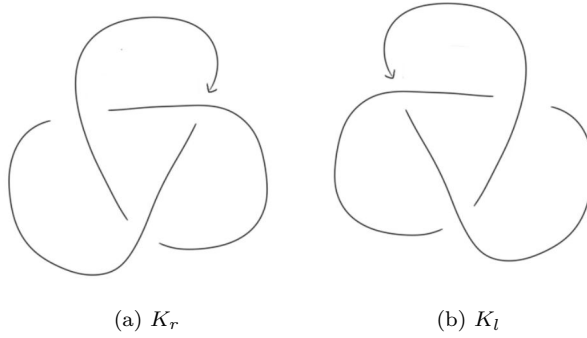
$$t^{-1}V(L_+) - t(-t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})(1) = 0$$

y el polinomio de este enlace es

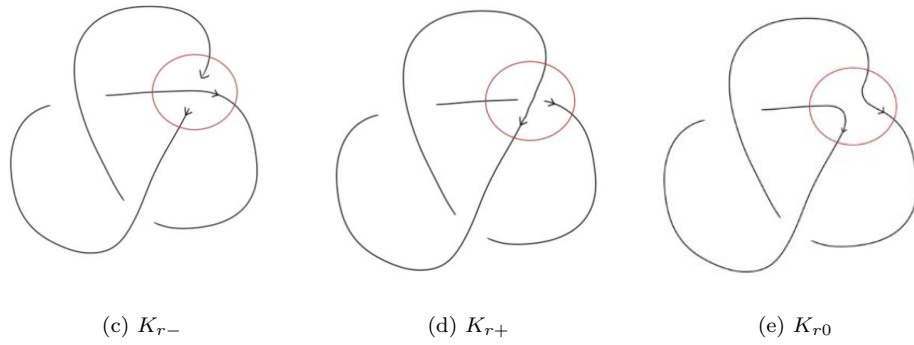
$$V(L) = V(L_+) = -t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

El polinomio de Jones nos permite analizar la quiralidad del trébol.

Ejemplo 3.2.2. Al primer trébol de la figura lo llamaremos trébol derecho, K_r , para distinguirlo de su imagen especular, K_l :



Vamos a empezar con el K_r . Tomamos un cruce cualquiera y vemos si es positivo o negativo. En nuestro caso será negativo. Y calculamos el resto:



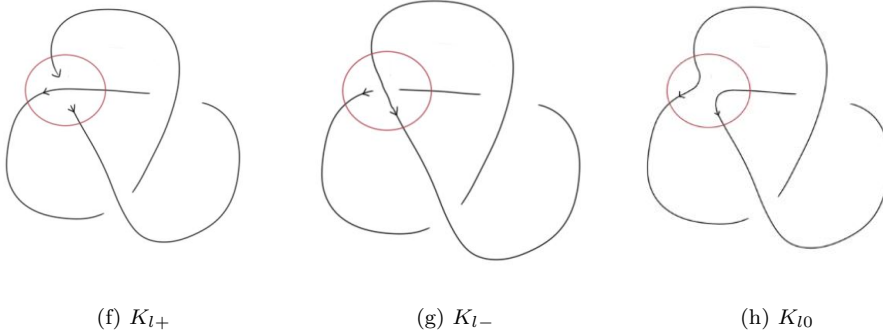
Como vemos K_{r+} es el nudo trivial y K_{r0} es un enlace Hopf, cuyo polinomio de Jones ya conocemos. Por tanto, ya podemos calcular el polinomio de K_r :

$$\begin{aligned} t^{-1}V(K_{r+}) - tV(K_{r-}) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})V(K_{r0}) &= 0 \\ t^{-1}1 - tV(K_{r-}) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})(-t^{-\frac{5}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) &= 0 \end{aligned}$$

Operando llegamos a:

$$V(K_r) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4} \quad (3.4)$$

Veamos ahora qué pasa con su imagen especular:



Vemos ahora que el cruce es positivo. Por tanto el polinomio de K_l coincidirá con el de K_{l+} . Si nos fijamos, K_{l-} vuelve a ser el nudo trivial y K_{l0} es un enlace Hopf. Calculemos el polinomio:

$$\begin{aligned} t^{-1}V(K_{l+}) - tV(K_{l-}) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})V(K_{l0}) &= 0 \\ t^{-1}V(K_{l+}) - t \cdot 1 + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})(-t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) &= 0 \end{aligned}$$

Operando obtenemos:

$$V(K_l) = t^1 + t^3 - t^4 \quad (3.5)$$

Esto muestra que el trébol es quiral.

Como hemos visto, el polinomio de Jones de un nudo puede no ser el mismo que el de su imagen especular. Pero, ¿hasta qué punto es esto siempre así?

Proposición 3.2.1 (Propiedades del polinomio de Jones). *Sea $V(K)(t)$ el polinomio de Jones de un nudo o enlace. Entonces,*

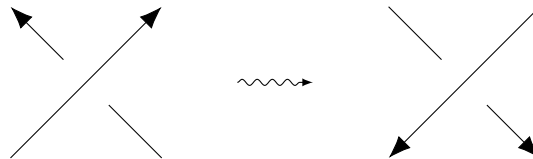
1. $V(-K)(t) = V(K)(t)$
El polinomio de Jones de un enlace orientado es el mismo que el del enlace con la orientación contraria. Es decir, este invariante no es sensible a si un nudo es invertible o no.
2. $V(K^*)(t) = V(K)(t^{-1})$
El polinomio de Jones de un enlace coincide con el de su imagen especular tras cambiar la variable t por t^{-1} .

Demostración. Antes de empezar vamos a recordar que:

$$V(K) = [(-A^3)^{-\omega(L)} \langle L \rangle]_{t^{\frac{1}{2}} = A^{-2}}$$

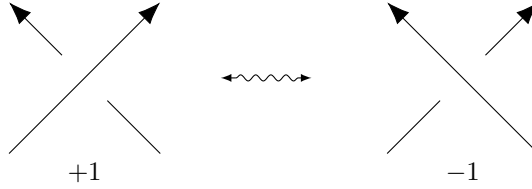
Con respecto a los apartados del enunciado:

1. Esta propiedad es trivial ya que, si K es nuestro nudo, el corchete de K es invariante con respecto a la orientación, así que lo único que puede cambiar es el writhe del nudo. Y, ¿cómo cambia?



O sea, no cambia.

2. De momento es fácil ver que $\omega(K) = -\omega(K^*)$:



Ahora vamos a llamar \bar{f} al polinomio de Laurent que se obtiene al sustituir A por A^{-1} . Probamos que:

$$\langle \bar{K} \rangle = \overline{\langle K \rangle}$$

comprobando que la asignación $\bar{K} \mapsto \overline{\langle K \rangle}$ cumple los tres axiomas de Kauffman y asigna los mismos valores que el corchete.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \langle \overline{\bigcirc} \rangle = 1 = \overline{\langle \bigcirc \rangle} \\ (2) \quad & \langle \overline{\text{crossing}} \rangle = A^{-1} \langle \text{left} \rangle + A \langle \text{right} \rangle = \langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{left} \rangle + A^{-1} \langle \text{right} \rangle = \\ & \overline{\langle \text{crossing} \rangle} \\ (3) \quad & \langle \overline{K \cup \bigcirc} \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle \bar{K} \rangle \\ & \overline{\langle K \cup \bigcirc \rangle} = (-A^{-2} - A^2) \overline{\langle K \rangle} \end{aligned}$$

Como se satisfacen los tres axiomas de Kauffman, tenemos que:

$$\langle \bar{K} \rangle = \overline{\langle K \rangle}, \quad X \langle \bar{K} \rangle = \overline{X \langle K \rangle}$$

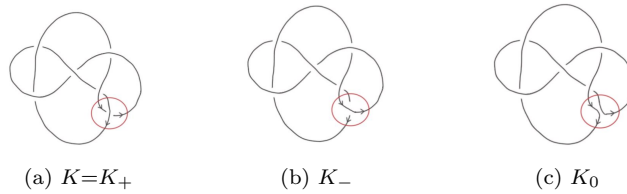
Así que,

$$V(\bar{K})(t) = V(K)(t^{-1})$$

□

Corolario 3.2.1. Si $V(K)(t) \neq V(K)(t^{-1})$ entonces el nudo K y su imagen especular no son equivalentes. Es decir, K es quiral.

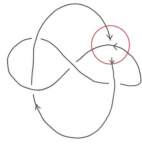
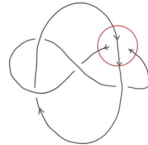
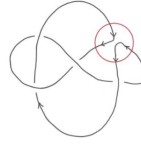
Ejemplo 3.2.3. Hemos visto, gracias al polinomio de Jones, que el trébol es un nudo quiral. Del mismo modo podemos ver cuándo un nudo es aquiral. Pondremos como ejemplo el nudo 6_3 , que llamaremos K :



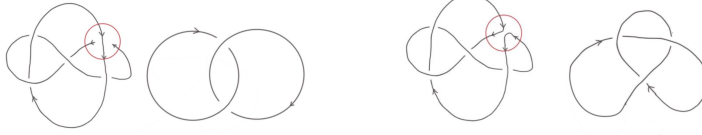
Si tomamos el nudo K_- y le aplicamos el segundo y primer movimiento de Reidemeister obtenemos un nudo ya conocido, el trébol (3.4):



Por tanto, solo nos queda ver cuál es el polinomio de K_0 . Para ello vamos a llamarle M y tenemos:

(c) $M=M_+$ (d) M_- (e) M_0

Donde el nudos M_- es un enlace Hopf (3.3) y M_0 vuelven a ser un trébol (3.4):



Calculamos el polinomios de Jones de M :

$$\begin{aligned} t^{-1}V(M_+) - tV(M_-) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})V(M_0) &= 0 \\ t^{-1}V(M_+) - t(-t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})(t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}) &= 0 \\ V(M) = V(M_+) &= -t^{\frac{9}{2}} - t^{\frac{5}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} - 2t^{-\frac{5}{2}} + t^{-\frac{7}{2}} + t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Como $M = K_0$, solo tenemos que sustituir en la relación skein de Jones y obtenemos el polinomio:

$$V(K)(t) = -t^3 + 2t^2 - 2t + 3 - 2t^{-1} + 2t^{-2} - t^{-3} \quad (3.6)$$

Como vemos, $V(K)(t) = V(K)(t^{-1})$, por tanto 6_3 y su imagen espejo son nudos equivalentes.

Además del polinomio de Jones existen otros polinomios de Laurent en una sola variable asociados a nudos y que se obtienen de diferentes relaciones skein, entre los más importantes está el polinomio de Conway-Alexander, que muchas veces llamaremos solamente polinomio de Alexander. Por otro lado está el polinomio HOMFLY: un polinomio de Laurent en dos variables que generaliza tanto al de Jones como el de Alexander. Se define así:

1. $P(\bigcirc)(l, m) = 1$
2. $lP(L_+)(l, m) + l^{-1}P(L_-)(l, m) + mP(L_0)(l, m) = 0$

La idea de la demostración es muy similar a la vista en la sección anterior. Además, como ocurre con el polinomio de Jones, podemos distinguir entre un nudo y su imagen espejo:

$$P(K^*)(l, m) = P(K)(l^{-1}, m)$$

Y podemos recuperar el polinomio de Jones con el siguiente cambio de variable:

$$P(K)(it^{-1}, i(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})) = V(K)(t)$$

Y el de Alexander, que introduciremos más adelante, como:

$$P(K)(i, -iz) = A(K)(z)$$

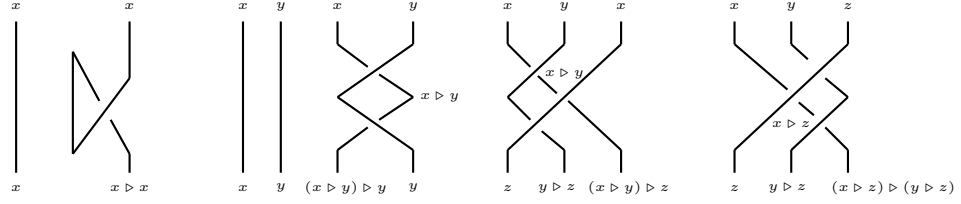
Capítulo 4

Keis y quandles

En este capítulo nos hemos apoyado en el tratamiento de quandles que aparece en el texto de M. Elhamdadi y S. Nelson [4]. Los quandles usados se han obtenido de la excelente página web <http://shell.cas.usf.edu/~saito/QuandleColor/> de Masahico Saito. Para las comprobaciones hemos programado funciones en SAGEMath que se incorporan en el Anexo. El tratamiento del cálculo diferencial en grupos libres, así como el cálculo de los polinomios de Alexander de los nudos tóricos, se puede encontrar los textos de G. Burde y H. Zieschang [2] y de R. Crowell y R. Fox [3]. Una excelente referencia para el grupo fundamental es el texto de Luis J. Hernández y María Teresa Rivas [5] junto con el libro de J. Stillwell [8]. Desafortunadamente, la interpretación topológica del grupo G' / G'' , aunque es la motivación de Alexander, queda totalmente fuera del alcance del presente trabajo, con un enfoque más algebraico, ya se trata del primer grupo de homología de la cubierta cíclica infinita del complemento del nudo en una 3-esfera.

4.1. Keis y quandles

Los movimientos de Reidemeister son esenciales a la hora de probar que una propiedad es un invariante del nudo, entonces, ¿por qué no crear una estructura algebraica que esté determinada por dichos movimientos? Mituhisa Takasaki introdujo esta nueva estructura algebraica: el kei. Siguiendo la noción de coloración, sabemos que si el arco superior y uno de los arcos inferiores tienen el mismo color, entonces el arco inferior que falta debe ser el mismo color. Además, si uno de los arcos inferiores de un cruce tiene color x , y su arco superior tiene color y , podríamos pensar que el arco que falta es función de x y de y . Esto sugiere que el conjunto de colores Γ que utilizamos para colorear un nudo está dotado de una operación binaria $(x, y) \mapsto x \triangleright y$ que es coherente con los movimientos de Reidemeister.

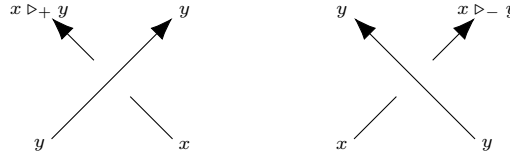


Definición 4.1.1 (Kei). Un **kei** es un conjunto Γ con una operación binaria tal que:

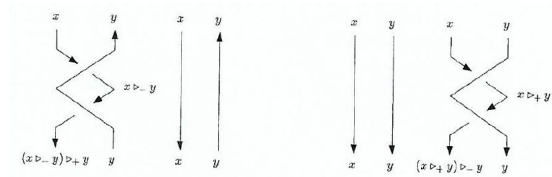
1. $x \triangleright y = x$
2. $(x \triangleright y) \triangleright y = x$
3. $(x \triangleright y) \triangleright z = (z \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$

para todo $x, y, z \in \Gamma$.

Para definir las operaciones en un kei no tenemos en cuenta cual de los dos arcos inferiores estamos considerando. Si el nudo está orientado, esta situación cambia, ya que hay un arco que precede al otro. Tenemos entonces dos casos ya mencionados anteriormente:



Sorprendentemente, el segundo movimiendo de Reidemeister impone que estas dos operaciones, \triangleright_+ y \triangleright_- , son una inversa de la otra. En efecto,



implica

$$(x \triangleright_- y) \triangleright_+ y = x = (x \triangleright_+ y) \triangleright_- y.$$

Denotando por xy a $x \triangleright_- y$ y por x/y a $x \triangleright_+ y$, se obtiene una nueva estructura algebraica.

Definición 4.1.2 (Quandle). Llamaremos **quandle** a un conjunto Γ dotado de dos operaciones xy , x/y de modo que para todo $x, y, z \in \Gamma$:

1. $xx = x$,
2. $(xy)/y = x = (x/y)y$,
3. $(xy)z = (xz)(yz)$.

Como vemos los keis son solo un caso particular de quandle en el cual $xy = x/y$, por ello se le suele llamar también quandles involutivos.

Definición 4.1.3 (Matriz asociada a un quandle). *Al igual que en los grupos las tablas de Cayley recogen toda la información acerca del producto, con los quandles podemos formar algo similar. Si $\{g_1, \dots, g_n\}$ son todos los elementos que forman un quandle Q , la matriz asociada a ese quandle la llamaremos M_Q . Dicha matriz $n \times n$ tendrá en la fila i y columna j al elemento $g_i \triangleright_+ g_j$ o, como lo hemos denotado antes, $g_i g_j$. De modo que:*

$$M_Q = \begin{pmatrix} g_1 & g_1 g_2 & \dots & g_1 g_n \\ g_2 g_1 & g_2 & \dots & g_2 g_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n g_1 & g_n g_2 & \dots & g_n \end{pmatrix}$$

Veamos algunos ejemplos de quandles:

Ejemplo 4.1.1 (Quandles). *Vamos a presentar tres matrices asociados a quandles de 3, 4 y 5 elementos:*

$$M_{Q_3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad M_{Q_4} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad M_{Q_5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Aunque no es una tarea complicada averiguar si una matriz representa o no un quandle, es bastante tedioso, por eso se lo dejaremos un pequeño programa que hemos desarrollado en SageMath para facilitarnos las cosas y que incluimos en el Anexo.

4.2. Kei y quandle fundamentales

En el Anexo se han recogido todas las definiciones y resultados de carácter básico requeridos en este apartado.

Definición 4.2.1 (Kei fundamental). *Dado un diagrama de un nudo K , se puede formar un kei definido por generadores y relaciones del siguiente modo:*

1. *Incluimos un generador x_a por cada arco a del diagrama.*
2. *Por cada cruce con arco superior a y arcos inferiores b y c , incluimos una relación $x_c = x_b \triangleright x_a$.*

*La clase de isomorfía (isoclase) de este kei, el cual se llama **kei fundamental** y se denota por $\mathcal{K}(K)$, no cambia por los movimientos de Reidemeister, por lo que la isoclase queda asociada al nudo.*

El kei fundamental es universal en el sentido de que si se pueden colorear los arcos del diagrama de K mediante un kei Γ es porque existe un homomorfismo de keis

$$\mathcal{K}(K) \rightarrow \Gamma.$$

En ese sentido, los diferentes elementos de

$$\text{Hom}(\mathcal{K}(K), \Gamma)$$

(conjunto de homomorfismos entre los dos keis) proporcionan las diferentes formas de colorear los arcos del diagrama de K mediante el kei Γ . Puesto que el kei fundamental solo depende del nudo entonces, para un kei Γ fijo, el número de estos homomorfismos (coloraciones) es un invariante del nudo.

Del mismo modo que se ha definido el kei fundamental se puede definir el **quandle fundamental** $\mathcal{Q}(K)$, cuya isoclase solamente depende del nudo. Desgraciadamente encontrar la matriz del kei o del quandle fundamental –si es que fuese finito– no es nada sencillo. Como antes, el número de coloraciones de los arcos de cualquier diagrama del nudo usando un quandle fijo es un invariante del nudo.

En la práctica, podemos usar una biblioteca con numerosos quandles y un breve programa para SAGEMath que nos dirá si ciertos elementos de un quandle pueden actuar como colores para los arcos de un diagrama de un nudo. El código del programa puede encontrarse en el Anexo. De este modo se pueden utilizar los quandles conocidos para comprobar si dos nudos son o no equivalentes.

Ejemplo 4.2.1. *Vamos a examinar los nudos 5_1 y 10_{132} :*

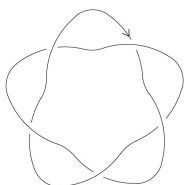


Figura 4.1: Nudo 5_1

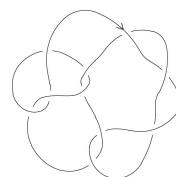


Figura 4.2: Nudo 10_{132}

Las matrices de estos nudos son

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Observamos que no es posible distinguir estos dos nudos con los métodos vistos hasta ahora:

- $\det(5_1) = \det(10_{132}) = 5$
- Como el determinante de ambos nudos es 5, su grupo abeliano Col^+ asociado será el mismo: $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}$
- Polinomio de Jones: $V_{5_1}(t) = V_{10_{132}}(t) = -\frac{1}{t^7} + \frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^5} + \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2}$

Vamos a ver si se pueden distinguir coloreándolos con un quandle específico. Usaremos las rutinas para SAGEMath incluidas en el Anexo. El quandle que usaremos consta de 24 elementos y su tabla de multiplicación es

```
print "Número de coloraciones no triviales de K10_132 usando Q10: ", len(coloraciones10_132(Q10)); print;
print "Número de coloraciones no triviales de K5_1 usando Q10: ", len(coloraciones5_1(Q10)); print;
```

Número de coloraciones no triviales de K10_132 usando Q10: 336

Número de coloraciones no triviales de K5_1 usando Q10: 0

Figura 4.3: Número de coloraciones de 10_{132} y 5_1

```
coloraciones10_132(Q10)
```

WARNING: Output truncated!

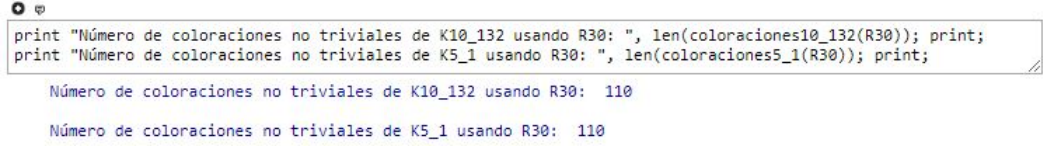
[full_output.txt](#)

```
[[21, 18, 11, 3, 14, 14, 21, 1, 1, 22],
 [3, 23, 7, 4, 19, 4, 23, 1, 6, 11],
 [10, 15, 20, 6, 13, 6, 15, 1, 22, 8],
 [12, 16, 3, 8, 14, 14, 12, 1, 1, 21],
 [4, 24, 8, 10, 14, 14, 4, 1, 1, 12],
 [22, 10, 24, 11, 14, 14, 22, 1, 1, 13],
 [11, 20, 5, 12, 4, 12, 20, 1, 19, 24],
 [18, 5, 23, 13, 22, 13, 5, 1, 21, 10],
 [6, 3, 18, 16, 14, 14, 6, 1, 1, 19],
 [19, 11, 10, 18, 14, 14, 19, 1, 1, 4],
 [8, 2, 9, 19, 6, 19, 2, 1, 13, 3],
 [24, 9, 15, 21, 12, 21, 9, 1, 4, 16],
 [16, 7, 2, 22, 21, 22, 7, 1, 12, 18],
 [13, 8, 16, 24, 14, 14, 13, 1, 1, 6],
 [18, 16, 6, 3, 12, 12, 18, 2, 2, 22],
 [22, 23, 17, 6, 12, 12, 22, 2, 2, 7],
 [16, 11, 4, 7, 22, 7, 11, 2, 18, 23],
 [6, 20, 11, 8, 19, 8, 20, 2, 9, 17],
 [15, 21, 24, 9, 14, 9, 21, 2, 7, 3],
 [14, 3, 16, 13, 12, 12, 14, 2, 2, 9],
 [23, 5, 20, 14, 7, 14, 5, 2, 22, 15],
 [8, 13, 3, 15, 12, 12, 8, 2, 2, 18],
 [9, 6, 23, 16, 12, 12, 9, 2, 2, 19],
 [7, 15, 13, 17, 12, 12, 7, 2, 2, 14],
 [17, 24, 5, 18, 8, 18, 24, 2, 19, 13],
```

Figura 4.4: Algunas coloraciones de 10_{132}

1	11	2	19	8	13	10	15	18	5	23	4	22	1	3	9	1	7	6	16	12	21	24	20
23	2	21	17	3	4	22	19	14	2	15	2	24	7	5	1	20	8	9	13	6	18	11	16
11	6	3	23	1	21	5	13	19	17	2	16	15	18	7	8	24	12	4	3	14	3	10	9
12	20	19	4	6	22	23	10	8	24	7	11	16	13	4	2	21	4	1	17	5	9	3	14
15	21	11	22	5	17	9	7	10	4	1	24	23	20	8	5	2	13	5	12	3	6	14	18
19	17	14	9	2	6	6	20	22	13	5	23	1	21	10	3	4	16	8	15	11	12	18	6
5	14	1	11	10	7	7	3	20	9	16	8	17	23	12	22	15	19	21	18	13	2	4	7
3	18	15	24	9	19	1	8	7	22	20	14	12	16	13	4	11	17	2	6	8	5	8	10
7	19	24	10	4	12	18	1	9	8	9	22	9	2	14	6	5	20	3	23	15	17	16	21
8	10	23	14	22	15	20	5	1	10	18	10	6	24	16	17	3	21	11	9	7	4	13	19
24	5	6	12	15	2	4	17	11	21	11	20	11	10	1	7	16	3	22	8	18	14	19	23
21	12	8	1	20	18	3	16	17	12	4	12	7	6	19	14	22	23	13	11	24	15	9	5
6	16	7	2	18	10	15	14	13	23	13	3	13	12	17	24	19	22	20	21	4	1	5	8
14	9	12	16	23	11	2	4	15	19	21	18	3	14	20	13	14	6	24	5	10	8	7	22
2	3	5	15	7	20	8	12	21	6	24	13	19	9	15	10	23	15	17	14	16	11	22	1
18	23	13	20	16	14	11	24	12	15	17	6	8	3	21	16	10	9	16	2	22	7	1	4
17	13	10	5	21	9	12	18	4	16	8	15	20	17	22	11	17	24	7	19	2	23	6	3
10	22	16	18	24	3	21	2	23	7	6	9	5	11	18	12	8	18	14	1	19	13	20	17
4	8	9	3	19	1	13	6	2	18	14	7	21	22	23	19	12	11	19	10	20	24	17	15
9	24	20	21	14	8	19	11	16	1	12	5	4	15	6	23	7	10	18	20	17	20	2	13
22	4	18	6	11	5	17	21	24	20	3	1	2	19	9	15	13	14	10	7	21	16	21	12
13	7	22	8	17	23	16	9	5	14	10	19	18	4	24	21	6	2	15	22	1	22	12	11
20	15	4	7	13	16	14	23	6	3	22	17	10	5	11	18	9	1	12	24	23	19	23	2
16	1	17	13	12	24	24	22	3	11	19	21	14	8	2	20	18	5	23	4	9	10	15	24

Los resultados al calcular las posibles coloraciones son que el nudo 10_{132}



```

print "Número de coloraciones no triviales de K10_132 usando R30: ", len(coloraciones10_132(R30)); print;
print "Número de coloraciones no triviales de K5_1 usando R30: ", len(coloraciones5_1(R30)); print;

Número de coloraciones no triviales de K10_132 usando R30: 110
Número de coloraciones no triviales de K5_1 usando R30: 110

```

Figura 4.5: Resultado no concluyente al usar otro quandle

admite 336 coloraciones no triviales mientras que el nudo 5_1 no admite ninguna (Figuras 4.3 y 4.4). El resultado depende fuertemente del quandle usado. Por ejemplo, si se usa el quandle

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 5 & 11 & 6 \\ 7 & 2 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 5 & 11 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 5 & 11 & 6 & 1 & 7 \\ 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 5 & 11 & 6 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 9 & 4 & 10 & 5 & 11 & 6 & 1 & 7 & 2 & 8 \\ 9 & 4 & 10 & 5 & 11 & 6 & 1 & 7 & 2 & 8 & 3 \\ 4 & 10 & 5 & 11 & 6 & 1 & 7 & 2 & 8 & 3 & 9 \\ 10 & 5 & 11 & 6 & 1 & 7 & 2 & 8 & 3 & 9 & 4 \\ 5 & 11 & 6 & 1 & 7 & 2 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 \\ 11 & 6 & 1 & 7 & 2 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 5 \\ 6 & 1 & 7 & 2 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

el resultado es sorprendente, pues ambos nudos tienen el mismo número de coloraciones – la nada despreciable cantidad de 110 (Figura 4.5)

4.3. Kei de Takasaki

Consideramos $\Gamma := \mathbb{Z}_n$ (o cualquier otro grupo abeliano) y definimos

$$x \triangleright y := 2y - x$$

Proposición 4.3.1. (Γ, \triangleright) es un kei.

Demostración. Por brevedad usaremos la notación xy para $x \triangleright y$. Claramente $xx = 2x - x = x$. Si definimos $x/y = xy$ tenemos $(xy)/y = 2y - (2y - x) = xy$, lo que prueba el segundo axioma. Finalmente $(xy)z = 2z - (2y - x) = 2z - 2y + x = 2(2z - y) - (2z - x) = (xz)(yz)$. \square

Una coloración de un diagrama de un nudo usando este kei es lo mismo que una asignación de un elemento $x_a \in \mathbb{Z}_n$ a cada arco a del diagrama de modo que en cada cruce se cumple que $2x_a - x_b - x_c = \bar{0}$, siendo a el arco superior y b y c los inferiores. Es decir, con este kei se recupera la idea de n -coloración.

4.4. Quandle de Alexander. Polinomio de Alexander.

Definición 4.4.1. Sea Λ el anillo de polinomios de Laurent $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ en la indeterminada t con coeficientes enteros. Dado un Λ -módulo A , el conjunto A con la nueva operación

$$xy := tx + (1 - t)y$$

se llama **quandle de Alexander**.

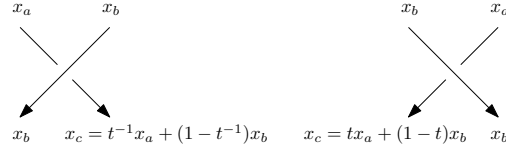
Es sencillo comprobar que efectivamente (A, xy) es un quandle. Lo interesante es que muchos conjuntos son, de forma natural, Λ -módulos.

Ejemplo 4.4.1. Sea $(A, +)$ un grupo abeliano y $\tau: A \rightarrow A$ un automorfismo de este grupo abeliano. Podemos definir en A una estructura de Λ -módulo mediante

$$(\lambda_{-m}t^{-m} + \cdots + \lambda_k t^k)x := \lambda_{-m}\tau^{-m}(x) + \cdots + \lambda_k\tau^k(x).$$

Esta construcción permite ver el *kei* de Takasaki como un quandle de Alexander. Basta para ello usar el automorfismo $\tau: x \mapsto -x$. De este modo la fórmula para el quandle de Alexander quedaría, en este caso, $xy = 2y - x$, que es la de Takasaki.

Dado el diagrama de un nudo orientado consideramos un Λ -módulo con generadores $\{x_a \mid a \text{ arco}\}$ y con las relaciones impuestas por el hecho de que deseamos colorear el diagrama con estos generadores mediante el correspondiente quandle de Alexander, es decir, dependiendo del tipo de cruce:



$$\text{Relación: } -x_a + (1 - t)x_b + tx_c = 0 \quad tx_a + (1 - t)x_b - x_c = 0 \quad (4.1)$$

Es muy sencillo demostrar que la clase de isomorfía de este Λ -módulo, al que llamaremos **módulo de Alexander (fundamental)** y denotaremos por Alex^+ no depende del diagrama del nudo. En lo que sigue nos referiremos como **matriz de Alexander**¹ a la matriz de relaciones de Alex^+ obtenida a partir de una presentación basada en relaciones como las anteriores. Puede consultarse el Anexo para información básica acerca de módulos y matrices de relaciones.

Ejemplo 4.4.2. De acuerdo a la ordenación de arcos y de cruces de la Figura 4.6 tenemos la siguiente matriz de Alexander para el trébol:

$$\begin{pmatrix} 1-t & t & -1 \\ t & -1 & 1-t \\ -1 & 1-t & t \end{pmatrix}$$

Proposición 4.4.1. Cualquiera de las relaciones (4.1) que definen el módulo de Alexander es consecuencia de las demás.

Demostración. Vamos a obtener las relaciones de un modo más organizado donde quedará clara la dependencia entre ellas. Para ello etiquetamos cada región de la sombra del diagrama con el índice $w(R)$ de cualquiera de sus puntos. Alrededor de cada cruce situamos un cuadrado con vértices en las cuatro regiones que inciden en el cruce, y orientamos los lados de ese cuadrado de modo que indiquen el paso de una región de menor índice a una de mayor.

¹En general puede llamarse así a cualquier matriz de relaciones para Alex^+ .

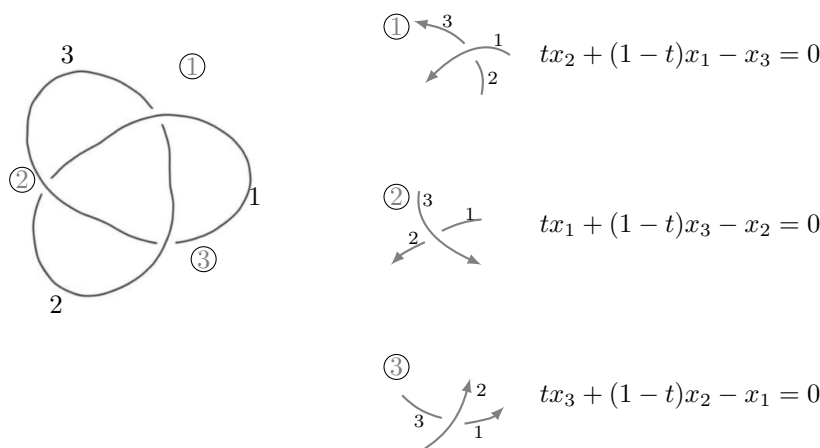
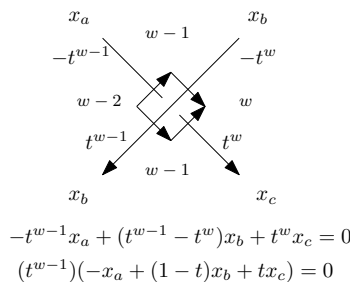


Figura 4.6: Relaciones del módulo de Alexander del trébol



Etiquetamos los cuatro segmentos que inciden en el cruce mediante $\pm t^k$ donde el signo es $-$ si la orientación que induce en el cuadrado el lado que cruza ese segmento no es la antihoraria. El exponente k es el índice de la región a la que apunta ese lado. La relación que asignamos a ese cruce se obtiene sumando cada x_a multiplicado por la etiqueta que hemos puesto a su segmento, tal y como muestra la figura.

Es sencillo observar que la relación que se obtiene en cada cruce es la correspondiente a la del módulo de Alexander salvo que estará multiplicada por un factor $\pm t^k$. Como en el anillo Λ estos escalares son invertible, ambas relaciones son equivalentes.

La ventaja de usar estas nuevas relaciones alteradas por estos factores $\pm t^k$ es que es inmediato comprobar que la suma de las nuevas relaciones es nula debido a que a cada segmento se le asocia un coeficiente y el opuesto en cada uno de sus extremos. \square

Proposición 4.4.2. *La matriz de Alexander posee menores no nulos de orden $n - 1$, donde n es el número de arcos.*

Demostración. Si evaluamos t en 1, las relaciones (4.1) se convierten en $x_a = x_c$ en cada cruce por lo que la matriz de relaciones pasa a tener, en cada fila, un 1 en la diagonal y un -1 fuera de ella. Esta matriz tiene rango $n - 1$ (n es el número de arcos), por lo que la matriz de relaciones debe poseer menores de orden $n - 1$ no nulos. \square

Proposición 4.4.3. *El 1-ésimo ideal elemental de Alex^+ es un ideal no nulo que está generado por cualquiera de los menores de orden $n-1$ de la matriz de Alexander.*

Demostración. Definamos

$$\text{Alex} := \left\{ \sum_{a \text{ arco}} \alpha_a x_a \in \text{Alex}^+ \mid \sum \alpha_a = 0 \right\},$$

que es el Λ -submódulo de Alex^+ generado por los elementos $x_a - x_e$ cuando a recorre los arcos distintos de uno prefijado e . Claramente

$$\text{Alex}^+ = \Lambda x_e \oplus \text{Alex}.$$

Una matriz de relaciones para los generadores $x_a - x_e$ se obtiene fácilmente ya que $tx_a + (1-t)x_b - x_c = 0$ es equivalente a $t(x_a - x_e) + (1-t)(x_b - x_e) - (x_c - x_e) = 0$ (y análogamente para la relación $-x_a + (1-t)x_b + tx_c = 0$). Así, teniendo en cuenta que una relación para Alex^+ es superflua, podemos obtener una matriz de relaciones para Alex sin más que quitarle a la matriz de Alexander una columna y una fila.

El 0-ésimo ideal elemental de Alex está generado por el determinante de la matriz de relaciones de Alex . Este ideal no depende del conjunto de generadores y relaciones elegidos, así que cambiando el x_e y la relación que quitamos obtenemos que todos los menores de orden $n-1$ de la matriz de Alexander generan un mismo ideal, que obligatoriamente es el 1-ésimo ideal elemental de Alex^+ . Como hay menores de orden $n-1$ no nulos, este ideal no es nulo. \square

Definición 4.4.2. *Llamaremos **polinomio de Alexander** de un nudo a cualquier generador del 1-ésimo ideal elemental de su módulo de Alexander. Usualmente, para garantizar la unicidad y que el polinomio sea un polinomio en el sentido tradicional, se normaliza eligiéndose un generador que no tenga potencias negativas en t y que tenga término independiente positivo.*

Corolario 4.4.1. *El polinomio de Alexander es un invariante del nudo.*

Demostración. La clase de isomorfía de Alex^+ es un invariante, y el 1-ésimo ideal elemental es invariante de la clase de isomorfía. Por tanto el 1-ésimo ideal elemental es un invariante del nudo. \square

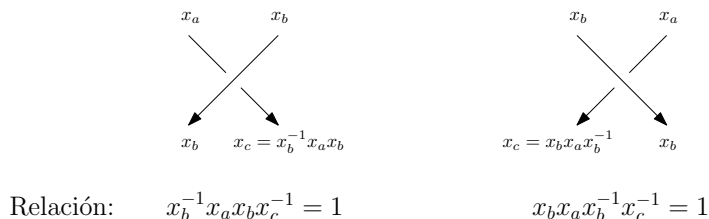
Ejemplo 4.4.3. *Para el trébol del Ejemplo 4.4.2 podríamos elegir cualquiera de los menores de orden 2. Por ejemplo*

$$\begin{vmatrix} 1-t & t \\ t & -1 \end{vmatrix} = t - 1 - t^2$$

por lo que el polinomio de Alexander sería $t^2 - t + 1$. Cualquier otro menor, como por ejemplo

$$\begin{vmatrix} -1 & 1-t \\ 1-t & t \end{vmatrix} = -t - (1-t)^2 = t^2 + t - 1$$

conduce, tras normalizarlo, al mismo polinomio.

Figura 4.7: Relaciones en $G(K)$

4.5. Quandle de un grupo

Cualquier grupo G puede convertirse en un quandle cambiando su operación xy por

$$x \triangleright y := yxy^{-1}.$$

Proposición 4.5.1. *Dado un grupo G , (G, \triangleright) es un quandle.*

Demostración. Claramente, la operación $x/y := y^{-1}xy$ cumple $(x \triangleright y)/y = x = (x/y) \triangleright y$. Igualmente, $x \triangleright x = xxx^{-1} = x$. Con respecto al tercer axioma, $(x \triangleright y) \triangleright z = zyxy^{-1}z^{-1} = (zyz^{-1})(zzx^{-1})(zyz^{-1})^{-1} = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$. \square

Colorear el diagrama de un nudo con un quandle (G, \triangleright) como el anterior es lo mismo que asignar un elemento $x_a \in G$ a cada arco del diagrama de modo que en cada cruce se cumplan las siguientes relaciones. Es natural el considerar un grupo, $G(K)$ con generadores $\{x_a \mid a \text{ arco}\}$ y las relaciones anteriores.

Lema 4.5.1. *Sea G un grupo y $\varphi: \mathcal{Q}(K) \rightarrow (G, \triangleright)$ un homomorfismo de quandles. Existe un único homomorfismo de grupos $\phi: G(K) \rightarrow G$ de modo que $\phi(x_a) = \varphi(x_a)$ para todo arco a .*

Demostración. En cada cruce, por ejemplo el de la derecha (recordar que la operación del quandle que seleccionamos es \triangleright_-) de la figura anterior, los generadores de $\mathcal{Q}(K)$ cumplen $x_c = x_a \triangleright x_b$. Esta relación se transporta mediante φ a una relación en (G, \triangleright) del tipo $\varphi(x_c) = \varphi(x_a) \triangleright \varphi(x_b)$, lo que en términos del producto de G es $\varphi(x_c) = \varphi(x_b)\varphi(x_a)\varphi(x_b)^{-1}$. Puesto que los elementos $\varphi(x_a)$ cumplen las relaciones que definen al grupo $G(K)$, existe un homomorfismo de grupos $\phi: G(K) \rightarrow G$ de modo que $\phi(x_a) = \varphi(x_a)$ para todo arco a . Puesto que los elementos x_a generan $G(K)$, este es el único homomorfismo posible. \square

La propiedad anterior nos dice que $G(K)$ queda unívocamente determinado por $\mathcal{Q}(K)$ puesto que salvo isomorfismo es el único grupo que cumple dicha propiedad. En particular, la clase de isomorfía de $G(K)$ no depende del diagrama sino del nudo pues $\mathcal{Q}(K)$ solo depende del nudo. Nos referiremos a $G(K)$ como el **grupo envolvente (del quandle fundamental del nudo)**.

4.5.1. Relación entre el grupo envolvente y el quandle de Alexander

Consideremos el grupo $G = G(K)$ envolvente del quandle universal de K . Sea G' su derivado. Este es el subgrupo de G generado por los **conmutadores** $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$. Puesto que en el grupo cociente G/G' tendremos que

$\bar{x}\bar{y}\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1} = \bar{1}$, G/G' es un grupo abeliano. De hecho, cualquier homomorfismo de G en un grupo abeliano induce un homomorfismo de G/G' en dicho grupo.

Lema 4.5.2. *El grupo G/G' es un grupo cíclico infinito generado por la proyección \bar{x}_a de cualquier x_a .*

Demostración. En G/G' , aparte de la conmutatividad, se cumplen las relaciones impuestas a G . Por tanto, por ejemplo, en los cruces del tipo de la derecha de la Figura 4.7

$$\bar{x}_c = \bar{x}_b\bar{x}_a\bar{x}_b^{-1} = \bar{x}_a$$

y análogamente con los del tipo de la izquierda. Por tanto en G/G' todos los generadores \bar{x}_a coinciden y se trata así de un grupo cíclico. También es inmediato ver que la asignación $x_a \mapsto 1 \in \mathbb{Z}$ induce un epimorfismo $G \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ que pasa al cociente G/G' pues la imagen de G' es 0. Esto prueba que G/G' no es finito. Por tanto es un grupo cíclico infinito. \square

Fijemos uno de los generadores $t := x_e$. Usamos la misma notación que para la indeterminada del anillo $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ porque dos potencias de x_e (con exponentes en \mathbb{Z}) coinciden si y solamente si los exponentes son iguales. Al conjugado de un elemento y por x_e^k lo denotaremos por $t^k \cdot y$. Es decir,

$$t^k \cdot y := x_e^k y x_e^{-k}.$$

Observamos que si consideramos

$$y_a := x_a x_e^{-1}$$

entonces las relaciones que definen a G son exactamente

$$1 = y_b(t \cdot y_a)(t \cdot y_b)^{-1}y_c^{-1}, \quad 1 = y_b^{-1}y_a(t \cdot y_b)(t \cdot y_c)^{-1}, \quad y_e = 1 \quad (4.2)$$

donde la segunda se demuestra como la primera pero cambiando y_b por y_b^{-1} , mientras que la primera se obtiene gracias a que

$$1 = x_b x_a x_b^{-1} x_c^{-1} = y_b x_e y_a y_b^{-1} x_e^{-1} y_c^{-1} = y_b(t \cdot y_a)(t \cdot y_b)^{-1} y_c^{-1}$$

Así pues, podemos ver G como el grupo generado por $\{t, y_a \mid a \text{ arco}\}$ que cumple las anteriores relaciones. Es importante hacer notar que el Lema 4.5.2 implica que

$$y_a \in G'.$$

También se cumplen más relaciones

$$\begin{aligned} 1 &= (t^k \cdot y_b)(t^{k+1} \cdot y_a)(t^{k+1} \cdot y_b)^{-1}(t^k \cdot y_c)^{-1}, \\ 1 &= (t^k \cdot y_b)^{-1}(t^k \cdot y_a)(t^{k+1} \cdot y_b)(t^{k+1} \cdot y_c)^{-1}, \quad y_e = 1 \end{aligned}$$

pero para G no se necesitan ya que involucran elementos que no son realmente generadores, y además son consecuencia de las que ya mencionadas sin más que conjuarlas reiteradas veces por x_e o por su inverso. Sin embargo esto cambia al considerar G' .

Lema 4.5.3. *G' es el grupo generado por los elementos $\{t^k \cdot y_a \mid a \text{ arco}, k \in \mathbb{Z}\}$ con relaciones dadas por (4.5.1).*

Demostración. Sea H el subgrupo generado por los elementos del enunciado. Observamos que H es un subgrupo normal de G . Como $y_a \in G'$ y G' es un subgrupo normal, $H \leq G'$. Claramente, $G = \langle x_e \rangle H$. Así, si $H \neq G'$, existiría $x_e^k \in G'$ con $k \neq 0$. Al pasar al cociente G/G' tendríamos que la imagen de x_e no generaría un grupo cíclico infinito. Por el Lema 4.5.2 concluimos que $H = G'$.

Ver que las relaciones que definen G' son las que aparecen en (4.5.1) es más complicado, ya que podría haber relaciones entre los generadores que no fuesen consecuencias de ellas.

Consideramos F un grupo generado por elementos que, por analogía, denotaremos por $t^k \cdot y_a$, donde $k \in \mathbb{Z}$ y a recorre los arcos sujeto a relaciones análogas a (4.5.1) pero cambiando y por y . En estos elementos la t no tiene ningún significado especial, solamente es parte de la notación. La aplicación π que envía $t^k \cdot y_a$ a $t^k \cdot y_a$ es un epimorfismo de F en G' .

El grupo libre generado por los $t^k \cdot y_a$ admite un automorfismo (de orden infinito) $t^k \cdot y_a \mapsto t^{k+1} \cdot y_a$, que por la forma de las relaciones (4.5.1) lo hereda F . Llamaremos t a este automorfismo. Podemos construir el producto semidirecto $\langle t \rangle \ltimes F$. Así, $t(t^k \cdot y_a) = (t^{k+1} \cdot y_a)t$, lo que notacionalmente es muy intuitivo. En este grupo definimos los elementos $x_a := y_a t$. Como $y_e = 1$, este grupo está generado por los elementos x_a . Además, por ejemplo, la relación $1 = y_b(t \cdot y_a)(t \cdot y_b)^{-1} y_c^{-1}$ se convierte en $1 = x_b t^{-1} (t y_a t^{-1}) (t y_b t^{-1})^{-1} t x_c^{-1} = x_b x_a x_b^{-1} x_c^{-1}$. Esto nos asegura la existencia de un epimorfismo de G en $\langle t \rangle \ltimes F$ de modo que $x_a \mapsto x_a$ para todo arco a . Si lo restringimos a G' obtenemos un epimorfismo de G' en el subgrupo generado por los elementos $t^k \cdot y_a$, que justamente es el inverso del epimorfismo π encontrado en el párrafo anterior. Así pues, G' es el grupo con generadores y relaciones dados en el enunciado. \square

El grupo cíclico infinito $\langle t \rangle$ (recordar que $t := x_e$) contenido en G actúa por conjugación como automorfismos de G' . El subgrupo derivado G'' de G' es un subgrupo normal de G , por lo que es estable por esa acción. La acción inducida en el grupo abeliano G'/G'' tiene una interpretación interesante:

Lema 4.5.4. *El grupo abeliano G'/G'' es un $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -módulo mediante*

$$t \cdot y G'' = x_e y x_e^{-1} G''.$$

Demostración. En efecto, el conjunto G'/G'' es un grupo abeliano con su producto. Además, la aplicación $\tau: y G'' \mapsto x_e y x_e^{-1} G''$ es un automorfismo de este grupo abeliano, así que, siguiendo el Ejemplo 4.4.1, G'/G'' es un $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -módulo con la acción dada en el enunciado. \square

Lema 4.5.5. *El Λ -módulo G'/G'' está generado, como Λ -módulo, por $\{\bar{y}_a \mid a \text{ arco}\}$.*

Demostración. Debemos comprobar que todo elemento de G'/G'' es una “combinación con coeficientes enteros” de elementos de la forma $t^k \cdot \bar{y}_a$ con $k \in \mathbb{Z}$ y a arco. Entrecomillamos el texto ya que aquí la operación como grupo abeliano de G'/G'' es su producto, así que una combinación con coeficientes enteros es lo mismo que un producto de elementos de la forma $t^k \cdot \bar{y}_a$ o de sus inversos. El resultado es así consecuencia inmediata del Lema 4.5.3. \square

Proposición 4.5.2. G' / G'' es isomorfo a Alex como Λ -módulo.

Demostración. Existe un homomorfismo de Λ -módulos $\text{Alex}^+ \rightarrow G' / G''$ dado por $x_a \mapsto \bar{y}_a$. Puesto que la imagen de x_e es $\bar{y}_e = \bar{1}$, este homomorfismo induce un epimorfismo $\text{Alex} \rightarrow G' / G''$ que envía $x_a - x_e$ a \bar{y}_a .

Por otro lado, puesto que los elementos $t^k \cdot (x_a - x_e)$ del grupo abeliano Alex cumplen las relaciones (4.5.1), el Lema 4.5.3 nos dice que existe un homomorfismo de grupos de G' en Alex que envía $t^k \cdot y_a$ a $t^k \cdot (x_a - x_e)$. Como Alex es abeliano, este homomorfismo pasa al cociente G' / G'' . Obviamente, este homomorfismo, por su definición, no es solo un homomorfismo de grupos abelianos sino de Λ -módulos. Y es justamente el inverso del epimorfismo descrito en el párrafo anterior. \square

4.5.2. Cálculo diferencial en grupos libres

El polinomio de Alexander se calcula a partir del 1-ésimo ideal elemental del módulo de Alexander, por lo que en realidad podemos calcularlo a partir de G' / G'' , es decir a partir de G . ¿Cuál es la ventaja de hacer esto? Enseguida veremos una forma de calcular el polinomio a partir de G , que es independiente de la presentación. Una interpretación topológica del grupo G permite encontrar presentaciones mucho más sencillas de este grupo, simplificando así notablemente el cálculo del polinomio para ciertas familias de nudos.

Conviene recordar que el **álgebra grupo** de un grupo F con coeficientes en \mathbb{Z} es el conjunto $\mathbb{Z}[F]$ de combinaciones lineales formales de elementos de F con la multiplicación propia de F extendida por bilinealidad:

$$\left(\sum_{g \in F} \alpha_g g \right) \left(\sum_{g' \in F} \beta_{g'} g' \right) = \sum_{g, g' \in F} \alpha_g \beta_{g'} gg'.$$

Definición 4.5.1. Una **derivación** de un grupo F es una aplicación $D: \mathbb{Z}[F] \rightarrow \mathbb{Z}[F]$ de modo que $D(u+v) = D(u) + D(v)$ y $D(gg') = D(g) + gD(g')$ para cualesquiera $g, g' \in F$ y $u, v \in \mathbb{Z}[F]$.

Recordar que, en general, I es algún conjunto de índices.

Lema 4.5.6. Sea F un grupo libremente generado por $\{\mathbf{x}_i \mid i \in I\}$ y sean $u_i \in \mathbb{Z}[F]$ ($i \in I$) elementos arbitrarios. Existe una única derivación $D: \mathbb{Z}[F] \rightarrow \mathbb{Z}[F]$ tal que $D(\mathbf{x}_i) = u_i$ para todo $i \in I$.

Demostración. Consideramos palabras en los símbolos \mathbf{x}_i o \mathbf{x}_i^{-1} ($i \in I$), siendo la palabra vacía, por definición 1. Para cada palabra definimos recursivamente $D(1) = 0$ y

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}_i g') &= u_i + \mathbf{x}_i D(g') \\ D(\mathbf{x}_i^{-1} g') &= -\mathbf{x}_i^{-1} u_i + \mathbf{x}_i^{-1} D(g') \end{aligned}$$

que es una combinación lineal de palabras con coeficientes en \mathbb{Z} . No es difícil comprobar que esta definición cumple que $D(u\mathbf{x}_i^e\mathbf{x}_i^{-e}v) = D(uv)$, donde $e = \pm 1$, para cualesquiera palabras u, v . Esto nos dice que esta aplicación induce una aplicación \mathbb{Z} -lineal $D: \mathbb{Z}[F] \rightarrow \mathbb{Z}[F]$, y tampoco es difícil comprobar que esta última aplicación es la derivación que buscamos. La unicidad es inmediata. \square

Definición 4.5.2. Sea F un grupo libremente generado por $\{\mathbf{x}_i \mid i \in I\}$. Las derivaciones $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}$ determinadas por

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

se llaman **derivadas parciales**.

Matriz de Alexander de una presentación finita

Consideremos $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, F el grupo libre generado por los \mathbf{x}_j y $R = (r_1, \dots, r_m)$ con $r_1, \dots, r_m \in F$. Consideramos también el grupo $G = G(\mathbf{X}|R)$ generado por \mathbf{X} con relaciones R . Tenemos una proyección natural $\pi: F \rightarrow G$. La imagen de \mathbf{x}_j la denotamos por x_j . Al par (\mathbf{X}, R) lo llamaremos **presentación** (ordenada) de G .

Asociada a la presentación podemos construir una matriz con elementos en $\mathbb{Z}[F]$

$$\left(\frac{\partial r_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right)_{i,j}$$

Puesto que existe un homomorfismo de anillos $\varphi: \mathbb{Z}[F] \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G/G']$ determinado por $\mathbf{x}_i \mapsto \overline{\mathbf{x}_i}$, podemos convertir la matriz anterior en una matriz con entradas en $\mathbb{Z}[G/G']$. Esta matriz se llama **matriz de Alexander** de la presentación (\mathbf{X}, R) . En el Anexo se han recogido algunas definiciones y resultados necesarios para esta parte.

Ejemplo 4.5.1. Consideremos como generadores y relaciones los usados para definir el grupo envolvente G del quandle fundamental de un nudo. La matriz de Alexander de la presentación será una matriz cuadrada con tantas filas y columnas como cruces tenga el diagrama del nudo. Si por ejemplo la relación en un cruce es $\mathbf{x}_b \mathbf{x}_a \mathbf{x}_b^{-1} \mathbf{x}_c^{-1} = 1$ entonces, la fila correspondiente tendrá ceros excepto posiblemente en las columnas correspondientes a las imágenes de las derivadas parciales asociadas a \mathbf{x}_a , \mathbf{x}_b y \mathbf{x}_c . En estas tendremos

$$\begin{aligned} \varphi \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_a} (\mathbf{x}_b \mathbf{x}_a \mathbf{x}_b^{-1} \mathbf{x}_c^{-1}) \right) &= \varphi(\mathbf{x}_b) \\ \varphi \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_b} (\mathbf{x}_b \mathbf{x}_a \mathbf{x}_b^{-1} \mathbf{x}_c^{-1}) \right) &= 1 - \varphi(\mathbf{x}_b \mathbf{x}_a \mathbf{x}_b^{-1}) \\ \varphi \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_c} (\mathbf{x}_b \mathbf{x}_a \mathbf{x}_b^{-1} \mathbf{x}_c^{-1}) \right) &= -\varphi(\mathbf{x}_b \mathbf{x}_a \mathbf{x}_b^{-1} \mathbf{x}_c^{-1}) \end{aligned}$$

Ahora bien, en el Lema 4.5.2 vimos que la imagen de los \mathbf{x}_a en G/G' coincide con la de uno fijo \mathbf{x}_e , y que esta imagen genera un grupo cíclico infinito. Sea $t := \overline{\mathbf{x}_e} = \varphi(\mathbf{x}_e)$. Usando que G/G' es abeliano y estos datos, tenemos

$$\varphi(\mathbf{x}_b) = \overline{\mathbf{x}_b} = \overline{\mathbf{x}_e} = t, \quad 1 - \varphi(\mathbf{x}_b \mathbf{x}_a \mathbf{x}_b^{-1}) = 1 - t, \quad -\varphi(\mathbf{x}_b \mathbf{x}_a \mathbf{x}_b^{-1} \mathbf{x}_c^{-1}) = -1,$$

así que la matriz de Alexander de esta presentación de G es exactamente la matriz de Alexander introducida a partir del módulo de Alexander.

Es muy importante tener esta nueva descripción de la matriz de Alexander que ya como se muestra en el Anexo, los ideales elementales, cuya definición repetiremos por conveniencia, son un invariante de la matriz al aplicarle transformaciones elementales. Y de hecho, estos ideales no dependen, salvo isomorfismo, de la presentación finita de G usada.

Asociados a una matriz A de orden $m \times n$ con coeficientes en un anillo conmutativo S podemos considerar una cadena de **ideales elementales**. El k -ésimo tal ideal $E_k(A)$ es el ideal generado por todos los menores de A de orden $n - k \times n - k$ si $k < n$ y $n - k \leq m$, 0 si $n - k > m$ y S si $n - k \leq 0$. Claramente

$$E_0(A) \subseteq E_1(A) \subseteq \cdots \subseteq E_n(A) = E_{n+1}(A) = \cdots = S.$$

Las transformaciones elementales de la matriz A no cambian la cadena de ideales. Así, dada una presentación (X, R) de un grupo G , podemos formar su matriz de Alexander y a partir de ellas calcular los ideales elementales, que serán ideales del anillo conmutativo $\mathbb{Z}[G/G']$ y que, salvo isomorfismo, solamente dependerán de G .

4.6. Conexión con el grupo fundamental

En esta sección discutimos de forma muy concisa la interpretación topológica del grupo envolvente del quandle fundamental. Formalizar con rigor lo aquí expuesto está fuera del alcance de este trabajo.

Dado un espacio topológico X y un punto $x_0 \in X$, un **lazo** o **camino cerrado** con base en x_0 es simplemente una aplicación continua $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$. Los lazos se pueden componer teniendo cuidado con el conjunto de salida:

$$\alpha \cdot \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Existe una noción de deformación continua de un lazo, basado el punto base x_0 , dentro del espacio X , y si γ se obtiene a partir de α de esta forma se dice que γ es homótopo a α . Esta relación resulta ser de equivalencia, recogiendo la clase $[\alpha]$ todos los lazos homótopos a α . Parece natural, y así es, que si α y β son homótopos a α' y β' respectivamente entonces $\alpha \cdot \beta$ y $\alpha' \cdot \beta'$ lo sean también. Es decir, el producto de lazos se hereda por el conjunto de clases de equivalencia $\pi_1(X, x_0)$ de lazos basados en x_0 . Con este producto resulta que $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo. El elemento neutro es la clase del lazo constante $s \mapsto x_0$ mientras que el inverso de $[\alpha]$ es simplemente $[\alpha(1 - s)]$. El grupo $\pi_1(X, x_0)$ se llama **grupo fundamental** del espacio topológico basado (X, x_0) —en realidad, cambiar de punto base dentro de una misma componente conexa por caminos de X conduce a grupos fundamentales isomorfos, por lo que si X es conexo por caminos entonces se omite x_0 de la notación.

Informalmente, dos lazos α y β con base en x_0 proporcionan elementos diferentes del grupo fundamental si β no se puede deformar continuamente hasta α debido a alguna peculiaridad del espacio topológico X —hay que tener también en cuenta el sentido en que se recorre el lazo. Por ejemplo si a \mathbb{R}^3 le quitamos una recta, un lazo que parta de x_0 y rodee varias veces en el mismo sentido el

hueco dejado por la recta y vuelva a x_0 será imposible de contraer hasta el lazo constante.

Dado un nudo K se puede considerar el espacio topológico $\mathbb{R}^3 \setminus K$, que es conexo por caminos, y su grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$. Determinar generadores para este grupo y las relaciones que cumplen es un problema interesante. En general existe un resultado que permite reducir el problema.

Teorema 4.6.1 (Seifert-van Kampen). *Sea X un espacio topológico unión de los interiores de dos subespacios X_1, X_2 . Asumamos también que X_1, X_2 y $\emptyset \neq X_1 \cap X_2$ son conexos por caminos. Dado un punto base $x_0 \in X_1 \cap X_2$, sea S un conjunto de generadores de $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$, S_1 uno de $\pi_1(X_1, x_0)$ con relaciones R_1 y S_2 uno de $\pi_1(X_2, x_0)$ con relaciones R_2 . Si consideramos las relaciones R impuestas al igualar la expresión de los elementos de S en términos de S_1 con su expresión en términos de S_2 entonces el grupo $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo generado por $S_1 \cup S_2$ con relaciones $R \cup R_1 \cup R_2$.*

Para un nudo K es posible encontrar una presentación del grupo $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ que, en este punto, resulta familiar. Se trata de la **presentación de Wirtinger**:

- cada arco a tiene asociado un generador x_a
- cada cruce tiene asociada una relación según sea el tipo del cruce, tal y como describe la Figura 4.8.

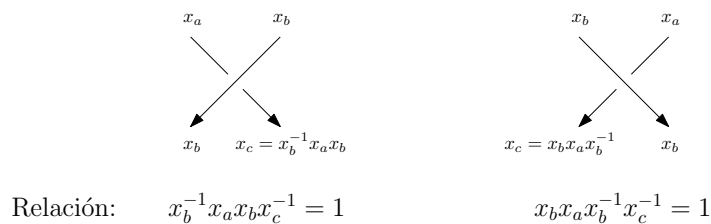


Figura 4.8: Presentación de Wirtinger

Sí, son las mismas relaciones que aparecieron en el grupo envolvente G del quandle fundamental. Esta nueva aproximación permite interpretar topológicamente mediante lazos las relaciones algebraicas. Es natural pensar que los lazos se podrán poner como producto de lazos que den una vuelta a cada arco del diagrama, por lo que no es de extrañar el conjunto de generadores. De hecho, vamos a orientar cada lazo de acuerdo a la regla de la mano derecha según indica la Figura 4.9

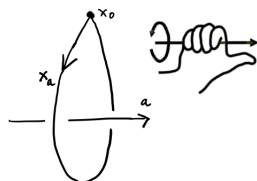
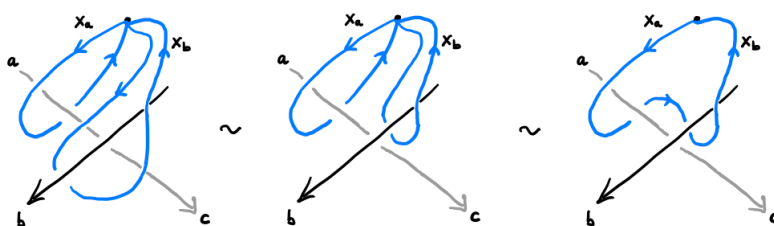


Figura 4.9: Orientación de los lazos mediante la regla de la mano derecha

Con esta elección nos fijamos en cada cruce. Por ejemplo, la relación impuesta en un cruce del primer tipo es $x_a x_b = x_b x_c$. Visto como lazos, el lado de la izquierda se representa gráficamente como indica la Figura 4.10 donde hemos

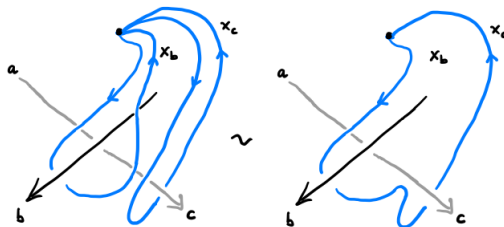
Figura 4.10: Composición $x_a x_b$

pasado el lazo x_b por el hueco que queda entre el arco superior y el inferior. En cuanto al lado derecho, el resultado aparece en la Figura 4.11.

Así que claramente ambos lazos son iguales, y eso explica topológicamente el significado de las relaciones.

La importancia de saber que el grupo envolvente G coincide con el fundamental es que podemos encontrar, usando argumentos topológicos, nuevas presentaciones para G más sencillas que la de Wirtinger, lo que permite calcular el polinomio de Alexander de forma más simple. Es el caso de los nudos tóricos. Un **nudo tórico** $T(p, q)$ es un nudo como el del lado izquierdo de la Figura 4.12 (el lado derecho muestra que el nudo $T(3, 2)$ es un trébol).

Calcular el polinomio de Alexander de $T(p, q)$ a partir de la presentación de Wirtinger no parece tarea sencilla. Sin embargo, podemos usar el Teorema de Seifert-van Kampen apoyando el nudo en una superficie tórica T . El nudo dará p vueltas longitudinalmente y q vueltas latitudinalmente. El espacio X es $\mathbb{R}^3 \setminus T(p, q)$. Sea \mathbf{T} el toro macizo con superficie T . Consideramos un toro macizo \mathbf{T}' un poquito más grande que \mathbf{T} y llamamos T' a su superficie. Proyectamos $T(p, q)$ a T' y le quitamos a \mathbf{T}' la lámina formada por los segmentos que unen cada

Figura 4.11: Composición $x_b x_c$

punto de $T(p, q)$ con su proyección. Elegimos X_1 como el interior del conjunto resultante. Por otro lado, X_2 es simplemente la clausura de $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{T}$ a la que le quitamos $T(p, q)$. La unión de los interiores de X_1 y X_2 contiene a todos los puntos que no están en \mathbf{T} y a los que están en \mathbf{T} pero que no pertenecen a $T(p, q)$, por lo que $X = X_1 \cup X_2$. La intersección $X_1 \cap X_2$ es el espacio comprendido entre T' y T sin contar ni T' ni la lámina mencionada.

Podemos retraer $X_1 \cap X_2$ a $T \setminus T(p, q)$ y de ahí a una copia de $T(p, q)$ desplazada un poquito. Los lazos en $X_1 \cap X_2$ se retraerán también. Así que el grupo fundamental es el mismo que el de una línea continua cerrada en el espacio, es decir, un grupo cíclico infinito generado por darle una vuelta a la propia curva γ .

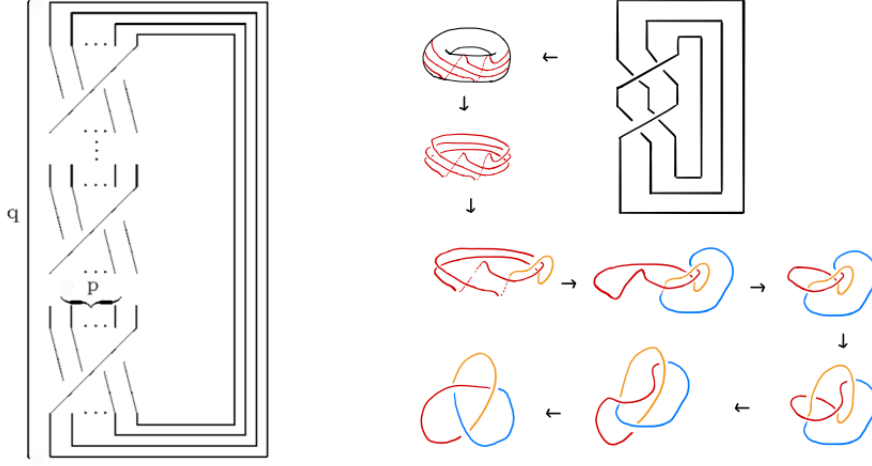
Podemos retraer X_1 hasta $\mathbf{T} \setminus T(p, q)$, y este conjunto se retrae hasta una circunferencia en el plano del ecuador, así que el grupo fundamental de X_1 es cíclico infinito generado por el lazo α que da una vuelta longitudinalmente. De igual modo, el grupo fundamental de X_2 está generado por un lazo β en X_2 que da una vuelta latitudinalmente a T .

Como γ da p vueltas longitudinalmente y q latitudinalmente, $[\gamma] = [\alpha]^p = [\beta]^q$, y el grupo fundamental de $\mathbb{R}^3 \setminus T(p, q)$ es $\langle a, b \mid a^p = b^q \rangle$. Podemos usar el cálculo diferencial para obtener, a partir de la relación $r = a^p b^{-q}$ la matriz

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial r}{\partial b} \right) = (1 + a + \dots + a^{p-1}, a^p(-b^{-1} - \dots - b^{-q})).$$

Ahora hemos de proyectar estos valores en G/G' que sabemos que es cíclico infinito generado por algún elemento t . En la presentación de Wirtinger sabemos que cualquier generador se proyecta en t , pero en una presentación diferente no lo podemos dar por hecho. Y es que además es falso. En nuestro caso, para hacernos una idea del t , observamos que $\bar{a} = t^n$ y $\bar{b} = t^m$. Puesto que $\bar{a}^p = \bar{b}^q$, entonces $t^{pn} = t^{qm}$. Así $pn = qm$ y, como p y q son primos entre sí, $n = qc$ y $m = pc$ para cierto c . Volviendo al principio, $\bar{a} = t^{qc}$ y $\bar{b} = t^{pc}$. El subgrupo generado por \bar{a} y \bar{b} está contenido en $\langle t^c \rangle$, pero debería ser $G/G' = \langle t \rangle$. Así que $c = \pm 1$. Cambiando t por t^{-1} si es caso,

$$\bar{a} = t^q \quad \bar{b} = t^p$$

Figura 4.12: Nudo tórico $T(p, q)$ y trébol visto como $T(3, 2)$

El 1-ésimo ideal elemental sabemos es el generado por los polinomios $(t^{pq} - 1)/(t^q - 1) = 1 + t^q + \dots + t^{q(p-1)}$ y $(t^{pq} - 1)/(t^p - 1) = 1 + t + t^p + \dots + t^{p(q-1)}$. Puesto que también sabemos que es un ideal principal –generado por el polinomio de Alexander, entonces está generado por el máximo común divisor de estos polinomios. Este máximo común divisor debería calcularse en $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ pero puede comprobarse que coincidirá con el calculado en $\mathbb{Z}[t]$. Puesto que $t^p - 1$ y $t^q - 1$ tienen máximo común divisor $t - 1$, entonces el máximo común divisor que buscamos coincide con el de los polinomios $(t^{pq} - 1)(t - 1)/(t^q - 1)(t^p - 1)$ y $(t^{pq} - 1)/(t^p - 1)$, es decir, el polinomio de Alexander del nudo tórico $T(p, q)$ es

$$\frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}.$$

Conclusión

En esta memoria hemos tratado todos los invariantes de un nudos que la extensión de la misma nos ha permitido. No hemos seguido un orden histórico, sino un orden de capacidad creciente: comenzando con el determinante del nudo, que tiene capacidad mínima para distinguir los nudos, y terminando con los quandles fundamentales, que tienen capacidad absoluta para diferenciar los nudos.

Dos son los puntos que más me gustaría destacar. El primero, la relación skein que introducimos en el Capítulo 3, que nos permite hallar de forma recursiva polinomios asociados a nudos haciendo siempre los mismos cambios al diagrama del nudo. Es muy interesante ver que se pueden conseguir resultados tan potentes partiendo de un método tan sencillo (aunque algo tedioso). Además, la forma en que se demuestra el polinomio de Jones partiendo de los axiomas de Kauffman es bastante curiosa. El segundo, por supuesto, la introducción de las nuevas estructuras algebraicas: los keis y los quanles. Hemos podido ver que una estructura algebraica basada únicamente en los movimientos de Reidemeister generaliza a una parte importante de los invariantes asociados a un nudo. Además, la pregunta que te planteas al comenzar a estudiar los nudos "¿existe algún invariante que distinga cualquier nudo de otro?" queda resuelta.

Por último, poder ver cómo se unifican el álgebra y la topología con la última parte del trabajo, en la que podemos ver una forma alternativa de llegar al grupo fundamental.

Bibliografía

- [1] Colin C. Adams: *The knot book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*. 1994, W.H.Freeman.
- [2] Gerhar Burde y Heiner Zieschang: *Knots*. 2003, Walter de Gruyter.
- [3] Richard H. Crowell y Ralph H. Fox: *Introduction to Knot Theory*. 1963, Springer-Verlag.
- [4] Mohamed Elhamdadi y Sam Nelson: *Quandles. An introduction to the algebra of knots*. 2015, American Mathematical Society.
- [5] Luis J. Hernández y María Teresa Rivas: *Grupo fundamental, superficies, nudos y aplicaciones recubridoras*. 2008, Servicio de publicaciones de la Universidad de La Rioja.
- [6] Charles Livingston: *Knot theory*. 1993, The Mathematical Association of America.
- [7] Vassily Olegovich Manturov: *Knot theory*. 2004, CRC Press LLC.
- [8] John Stillwell: *Classical topology and combinatorial group theory (second edition)*. 1993, Springer-Verlag.

Páginas web:

- [9] Samantha Dixon: Composite knot determinants,
<http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Dixon.pdf>
- [10] Benita Ho y Sam Nelson: Matrices and finite quandles,
<https://arxiv.org/pdf/math/0412417.pdf>
- [11] David Austin: Knot Quandaries Quelled by Quandles,
<http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fc-2016-03>
- [12] Masahico Saito: Small connected quandles and their knot colorings,
<http://shell.cas.usf.edu/~saito/QuandleColor/>

Anexo.

Rudimentos algebraicos acerca de quandles.

En este apartado vamos a comentar muy brevemente algunos conceptos algebraicos generales de utilidad aplicados al caso particular de quandles. Con las modificaciones triviales se puede hacer lo mismo en el caso de keis.

Dado un quandle $(Q, xy, x/y)$, un **subquandle** es un subconjunto no vacío de Q que es cerrado por las operaciones $xy, x/y$. Un **homomorfismo** entre dos quandles Q_1 y Q_2 es una aplicación $\varphi: Q_1 \rightarrow Q_2$ de modo que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. **Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos** son simplemente homomorfismos inyectivos, suprayectivos y biyectivos respectivamente. La **isoclase** de un quandle la forman él y todos los quandles isomorfos a él.

Hemos de notar que, para un homomorfismo φ , $\varphi(x) = \varphi((x/y)y)\varphi(x/y)\varphi(y)$ implica que $\varphi(x/y) = \varphi(x)/\varphi(y)$, por lo φ preserva automáticamente la segunda operación $/$. En particular, la **imagen** $\varphi(Q_1)$ es un subquandle de Q_2 .

El **producto cartesiano** de dos quandles es un quandle con las operaciones componente a componente.

Al no haber ningún elemento neutro, la noción de núcleo de un homomorfismo es más complicada. Primero necesitamos el concepto de (relación de) **congruencia** en un quandle Q . Una tal relación V es simplemente una relación de equivalencia –y por tanto $V \subseteq Q \times Q$ – que es un subquandle del producto cartesiano $Q \times Q$. Para una relación de congruencia V denotamos por Q^V al conjunto de clases de equivalencia. La clase de equivalencia de x la denotamos por $[x]$ o por \bar{x} . En Q^V podemos definir operaciones

$$[x][y] := [xy], \quad [x]/[y] := [x/y]$$

Puesto que $[x] = [x']$ e $[y] = [y']$ si y solamente si $(x, x'), (y, y') \in V$, y como V es un subquandle de $Q \times Q$ entonces $(xy, x'y'), (x/y, x'/y') \in V$, por lo que $[xy] = [x'y']$ y $[x/y] = [x'/y']$. Esto muestra que las operaciones están bien definidas. Es sencillo ver que la proyección $\pi: Q \rightarrow Q^V$ dada por $x \mapsto [x]$ es un epimorfismo de quandles.

Un homomorfismo φ de quandles no da lugar a un núcleo tal y como se ve en las asignaturas del Grado en matemáticas. En su lugar, φ define una congruencia, que llamamos **núcleo** de φ y que denotamos por $\ker \varphi$: x es congruente con x' si y solamente si $\varphi(x) = \varphi(x')$. Obviamente, φ origina una aplicación $\bar{\varphi}: Q_1^{\ker \varphi} \rightarrow \varphi(Q_1)$ mediante $\bar{\varphi}([x]) = \varphi(x)$. Esta aplicación está bien definida ya que si $[x] = [x']$ entonces $\varphi(x) = \varphi(x')$. También es inyectiva por su propia definición, y obviamente es suprayectiva, así que sí se cumple un análogo

del **primer teorema de isomorfía**: $Q_1^{\ker \varphi}$ es isomorfo a $\varphi(Q_1)$. Dada una congruencia V , el núcleo de la proyección $\pi: Q \rightarrow Q^V$ es justamente V .

Dado un conjunto de símbolos $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i \mid i \in I\}$, podemos considerar palabras no asociativas formadas a partir de estos símbolos con las operaciones binarias \cdot (o simplemente yuxtaposición) y $/$. Por ejemplo, $(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j) / \mathbf{x}_k$ sería una tal palabra. Declaramos que una palabra que contiene una subpalabra del tipo uv (respec. $(uv)/v$, $(uv)w$) es equivalente a la misma palabra donde la subpalabra se sustituye por u (respec. u , $(uv)(vw)$). El conjunto de las clases de equivalencia resultantes es un quandle $Q(\mathbf{X})$ con las operaciones inducidas por \cdot y $/$. Para cualquier quandle Q y cualesquiera $x_i \in Q$ ($i \in I$) existe un único homomorfismo de quandles $\varphi: Q(\mathbf{X}) \rightarrow Q$ de modo que $\varphi(\mathbf{x}_i) = x_i$ para todo $i \in I$. El quandle $Q(\mathbf{X})$ se dice **quandle libre** generado por \mathbf{X} .

Dado un subconjunto $R \subseteq Q(\mathbf{X}) \times Q(\mathbf{X})$, al que llamaremos **relaciones** podemos considerar la intersección V de todas las congruencias que contienen a R . Es decir, es la menor congruencia que contiene a R . Llamaremos **quandle generado por \mathbf{X} con relaciones R** al quandle $Q(\mathbf{X})^V$, y por extensión a cualquier quandle isomorfo a él. Lo denotaremos por $Q(\mathbf{X}|R)$. Dado cualquier quandle Q , elementos $x_i \in Q$ ($i \in I$) y el homomorfismo $\varphi: Q(\mathbf{X}) \rightarrow Q$ tal que $\varphi(\mathbf{x}_i) = x_i$, si para todo $(r, r') \in R$ se tiene que en Q $\varphi(r) = \varphi(r')$ entonces $\ker \varphi$ es una congruencia que contiene a R . Por lo tanto, si $[u] = [u']$ en $Q(\mathbf{X})^V$ entonces $(u, u') \in R \subseteq \ker \varphi$ y así $\varphi(u) = \varphi(u')$. Es decir, φ induce un (único) homomorfismo $\varphi: Q(\mathbf{X}|R) \rightarrow Q$ que envía $[\mathbf{x}_i]$ a x_i ($i \in I$). Intuitivamente, $Q(\mathbf{X}|R)$ es el quandle más general generado por elementos \mathbf{x}_i de modo que se cumple que $r = r'$ si $(r, r') \in R$. El par (\mathbf{X}, R) se llama **presentación** (del quandle $Q(\mathbf{X}|R)$). Algunas veces conviene considerar algún tipo de orden en los generadores y en las relaciones, aunque cambiar de orden conduce a quandles isomorfos. También es habitual describir los elementos del conjunto R no como pares (r, r') sino como expresiones $r = r'$.

Rudimentos algebracios acerca de presentaciones de grupos

Al igual que se han introducido en el apartado anterior los quandles libres y los quandles definidos por generadores y relaciones, es también muy sencillo introducir los grupos libres y grupos definidos por generadores y relaciones. Para definir un grupo libre generado por un conjunto de símbolos $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i \mid i \in I\}$ primero se consideran palabras asociativas en los símbolos $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i^{-1}$, admitiendo la palabra vacía a la que denotamos por 1. La yuxtaposición induce un producto en el conjunto de estas palabras, siendo 1 el elemento neutro. Declaramos que si una palabra contiene la subpalabra $\mathbf{x}_i^\epsilon \mathbf{x}_i^{-\epsilon}$ ($\epsilon = \pm 1$) entonces es equivalente a la palabra resultante de borrarle esa subpalabra. Esto define una clase de equivalencia en el conjunto de palabras. No es difícil comprobar que la operación entre palabras es heredada por el conjunto $G(\mathbf{X})$ de clases de equivalencia convirtiendo a este conjunto en un grupo, al cual llamamos **grupo libre** generado por \mathbf{X} . Este grupo tiene la propiedad de que dado cualquier otro grupo G y elementos $x_i \in G$ ($i \in I$) existe un único homomorfismo de grupos $\varphi: G(\mathbf{X}) \rightarrow G$ tal que $\varphi(\mathbf{x}_i) = x_i$.

Llamamos conjunto de **relaciones** a cualquier subconjunto $R \subseteq G(\mathbf{X}) \times G(\mathbf{X})$.

$G(\mathbf{X})$. Podemos considerar la intersección de todos los subgrupos normales de $G(\mathbf{X})$ que contienen a los elementos $r'r^{-1}$ cuando (r, r') recorre R y formar el grupo cociente $G(\mathbf{X}|R)$ de $G(\mathbf{X})$ por este subgrupo normal. Decimos que $G(\mathbf{X}|R)$ es el **grupo generado por \mathbf{X} con relaciones R** , y por extensión también usaremos ese nombre para cualquier grupo isomorfo a él. El par $(\mathbf{X}|R)$ se llama **presentación** de $G(\mathbf{X}|R)$. Si tanto \mathbf{X} como R son finitos entonces se dice que la presentación es finita. Es habitual el dar las relaciones no como pares sino como el conjunto $\{r'r^{-1} \mid (r, r') \in R\}$. Quedará perfectamente claro por el contexto qué forma estamos usando.

Dos grupos $G(\mathbf{X}|R)$, $G(\mathbf{X}'|R')$ pueden ser isomorfos, aunque las presentaciones (\mathbf{X}, R) , (\mathbf{X}', R') sean diferentes. Para aclarar esto es conveniente definir lo que entenderemos por presentaciones equivalentes. Dadas dos presentaciones (\mathbf{X}, R) y (\mathbf{X}', R') primero declaramos que son isomorfas si existe alguna aplicación biyectiva $\phi: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ de modo que el homomorfismo $\varphi: G(\mathbf{X}|R) \rightarrow G(\mathbf{X}'|R')$ determinado por $\varphi(\mathbf{x}_i) = \phi(\mathbf{x}_i)$ cumple que $\varphi \times \varphi(R) = R'$. Es decir, dos representaciones serían isomorfas si, salvo cambio de nombre de los generadores, son la misma. El concepto de presentaciones equivalentes requiere de las **transformaciones de Tietze** de una presentación (\mathbf{X}, R) —también usaremos el subgrupo normal N de $G(\mathbf{X})$ generado por $\{r'r^{-1} \mid (r, r') \in R\}$. Estas transformaciones son las que a continuación detallamos o las inversas de ellas:

- (Añadir una relación superflua) Dados cualesquiera $r, r' \in G(\mathbf{X}, R)$ tales que $\bar{r} = \bar{r}'$ en $G(\mathbf{X}, R)$ añadimos a R la relación (r, r') .
- (Añadir un generador superfluo) Dado un elemento $w \in G(\mathbf{X})$ y un símbolo $\mathbf{x} \notin \mathbf{X}$, añadimos a \mathbf{X} el generador \mathbf{x} pero también a R le añadimos la relación (\mathbf{x}, w) .

Decimos que dos presentaciones son **equivalentes** si una es isomorfa al resultado de la otra tras un número finito de transformaciones de Tietze.

Proposición 4.6.1 (Tietze, 1908). *Dos presentaciones finitas definen grupos isomorfos si y solamente si son equivalentes.*

Demostración. Obviamente, alterar una presentación por una transformación de Tietze no cambia la clase de isomorfía del grupo que define. Así, dos representaciones equivalentes definen grupos isomorfos.

Para demostrar el recíproco podemos asumir, cambiando nombres, que en las presentaciones (\mathbf{X}, R) y (\mathbf{X}', R') que definen grupos isomorfos los generados cumplen que $\mathbf{X} \cap \mathbf{X}' = \emptyset$. N el menor subgrupo normal generado por $r_2 r_1^{-1}$ cuando (r_1, r_2) recorre R , y análogamente N' . Sea H un grupo isomorfo a $G(\mathbf{X}|R)$ y a $G(\mathbf{X}'|R')$, y sean $\varphi: G(\mathbf{X}) \rightarrow H$ y $\varphi': G(\mathbf{X}') \rightarrow H$ epimorfismos de grupos con núcleos N y N' respectivamente.

Vamos a considerar $\hat{\mathbf{X}} := \mathbf{X} \cup \mathbf{X}'$ y el grupo libre $G(\hat{\mathbf{X}})$. Podemos ver $G(\mathbf{X})$ y $G(\mathbf{X}')$ como subgrupos de $G(\hat{\mathbf{X}})$. Existe un único epimorfismo $\hat{\varphi}: G(\hat{\mathbf{X}}) \rightarrow H$ tal que $\hat{\varphi}(\mathbf{x}_i) = \varphi(\mathbf{x}_i)$ y $\hat{\varphi}(\mathbf{x}'_j) = \varphi'(\mathbf{x}'_j)$ para todos $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$ y $\mathbf{x}'_j \in \mathbf{X}'$. Este epimorfismo es la extensión de φ y de φ' a todo $G(\hat{\mathbf{X}})$.

Puesto que φ es epimorfismo, dado $\mathbf{x}'_j \in \mathbf{X}'$ existe $w_j \in G(\mathbf{X})$ tal que $\hat{\varphi}(w_j) = \hat{\varphi}(\mathbf{x}'_j)$. Por tanto, la presentación (\mathbf{X}, R) es equivalente a la presentación $(\hat{\mathbf{X}}, R \cup \{(\mathbf{x}'_j, w_j)\})$. Si llamamos S' al conjunto de todos los (\mathbf{x}'_j, w_j) así obtenidos entonces (\mathbf{X}, R) es equivalente a $(\mathbf{X} \cup \mathbf{X}', R \cup S')$. Sea \hat{N} el menor subgrupo

normal de $G(\hat{\mathbf{X}})$ que contiene a los elementos ab^{-1} cuando (a, b) recorre $R \cup S'$. Por elección, $\hat{N} \subseteq \ker \hat{\varphi}$. Además, si $u \in \ker \hat{\varphi}$ entonces, módulo \hat{N} , u se puede expresar en términos de \mathbf{X} y por tanto pertenece a $\ker \varphi$, que es el subgrupo normal más pequeño que contiene a ab^{-1} cuando (a, b) recorre R . Así, $u \in \hat{N}$. Es decir, $\ker \hat{\varphi} = \hat{N}$.

La imagen de ab^{-1} por $\hat{\varphi}$ es 1 para cualquier $(a, b) \in R'$. Por tanto, estos elementos están en \hat{N} . Así, la presentación (\mathbf{X}, R) es equivalente a la presentación $(\hat{\mathbf{X}}, R \cup R' \cup S')$. Y si definimos un conjunto S cuyos elementos sean (\mathbf{x}_i, w'_i) de modo que $w'_i \in G(\mathbf{X}')$ y $\hat{\varphi}(\mathbf{x}_i) = \hat{\varphi}(w'_i)$, podremos concluir del mismo modo que (\mathbf{X}, R) es equivalente a $(\hat{\mathbf{X}}, R \cup R' \cup S \cup S')$. De igual modo (\mathbf{X}', R') también es equivalente a esta última presentación. Por tanto (\mathbf{X}, R) es equivalente a (\mathbf{X}', R') . \square

Ideales elementales de una matriz

Sea A una matriz con entradas en un anillo conmutativo unitario S . Llamaremos **transformaciones elementales** a las siguientes modificaciones:

1. Sumarle a una fila (o columna) de A un múltiplo de otra.
2. Intercambiar de orden dos filas (o columnas).
3. Multiplicar una fila (o columna) por un elemento invertible de S .

Diremos que dos matrices son equivalentes si una se puede transformar en la otra mediante un número finito de transformaciones elementales.

Asociados a una matriz A de orden $m \times n$ con coeficientes en un anillo conmutativo S podemos considerar una cadena de **ideales elementales**. El k -ésimo tal ideal $E_k(A)$ es el ideal generado por todos los menores de A de orden $n - k \times n - k$ si $k < n$ y $n - k \leq m$, 0 si $n - k > m$ y S si $n - k \leq 0$.

Proposición 4.6.2. *Se tiene que*

$$E_0(A) \subseteq E_1(A) \subseteq \cdots \subseteq E_n(A) = E_{n+1}(A) = \cdots = S.$$

Demostración. Cualquier menor de un cierto orden se puede desarrollar en términos de menores de orden inferior en una unidad, por lo que pertenece al ideal generado por estos últimos. \square

Proposición 4.6.3. *Matrices equivalentes definen la misma cadena de ideales elementales.*

Demostración. Está claro que la segunda y tercera transformación no cambian los ideales elementales. En cuanto a la primera, si B es el resultado de sumarle a una fila de A un múltiplo de otra entonces un menor de B o bien es un menor de A o bien es una suma de dos menores de A , uno de ellos multiplicado por un elemento de S . En particular el k -ésimo ideal elemental de B está contenido en el de A . De igual modo, A se puede obtener a partir de B deshaciendo la primera operación, lo que demuestra el contenido recíproco entre los k -ésimos ideales elementales. \square

Demostración. Hay que notar que en realidad se pueden hacerle más transformaciones a A sin alterar los ideales elementales. Por ejemplo se pueden eliminar o añadir filas y columnas nulas. También se pueden añadir una fila en la posición i , y una columna en la misma posición, de modo que las entradas sean nulas excepto la de la posición de la diagonal que será 1 (o un elemento invertible). La operación inversa de la anterior tampoco altera la cadena de ideales elementales.

Proposición 4.6.4. *Si $\varphi: S \rightarrow S'$ es un epimorfismo de anillos unitarios, A es una matriz con entradas en S y $\varphi(A)$ es la matriz formada a partir de A cambiando cada entrada por su imagen mediante φ entonces $\varphi(E_k(A)) = E_k(\varphi(A))$.*

Invarianza de los ideales elementales de la matriz de Alexander de una presentación (\mathbf{X}, R)

La matriz de Alexander de la presentación (\mathbf{X}, R) , donde $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ se define como la imagen de la matriz

$$\left(\frac{\partial r_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right)_{i,j}$$

por el homomorfismo $\mathbb{Z}[G(\mathbf{X})] \rightarrow \mathbb{Z}[G(\mathbf{X}|R)] \rightarrow \mathbb{Z}[G(\mathbf{X}|R)/G(\mathbf{X}|R)']$. Cambiar el orden de \mathbf{X} o de R solamente conduce a un cambio de signo en algunos de los menores de esta matriz, por lo que no es relevante en lo siguiente.

Teorema 4.6.2. *Dos presentaciones finitas equivalentes originan, salvo isomorfismo, la misma cadena de ideales elementales.*

Demostración. Basta probarlo cuando una presentación se obtiene a partir de la otra mediante una transformación de Tietze. Por no alargar más la exposición solamente lo demostraremos para una de ellas, pudiéndose consultar el resultado en [3].

Supongamos que una de las presentaciones es (\mathbf{X}, R) mientras que la otra es $(\mathbf{X}, R \cup \{r\})$ donde r pertenece al subgrupo normal generado por R en $G(\mathbf{X})$. La matriz de la nueva presentación tiene una fila más, pero vamos a ver que las matrices son equivalentes en el sentido ampliado de la Nota 4.6.

Por pertenecer al subgrupo normal generado por R , escribir r como

$$r = \prod_{k=1}^p u_k r_{i_k}^{e_k} u_k^{-1}$$

para ciertos $u_k \in G(\mathbf{X})$ y $r_{i_k} \in R$. Tomando ahora derivadas parciales

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{x}_j} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} (u_1 r_{i_1}^{e_1} u_1^{-1}) + u_1 r_{i_1}^{e_1} u_1^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} (u_2 r_{i_2}^{e_2} u_2^{-1}) + \dots + \prod_{k=1}^{p-1} u_k r_{i_k}^{e_k} u_k^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} (u_p r_{i_p}^{e_p} u_p^{-1}).$$

Al proyectar este elemento a $\mathbb{Z}[G(\mathbf{X}|R)]$ obtenemos, como $\overline{u_k r_{i_k}^{e_k} u_k^{-1}} = 1$,

$$\overline{\frac{\partial r}{\partial \mathbf{x}_j}} = \sum_{k=1}^p \overline{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} (u_k r_{i_k}^{e_k} u_k^{-1})}.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}(u_k r_{i_k}^{e_k} u_k^{-1}) = \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{x}_j} + u_k \frac{r_{i_k}^{e_k} - 1}{r_{i_k} - 1} \frac{\partial r_{i_k}}{\partial \mathbf{x}_j} - u_k r_{i_k}^{e_k} u_k^{-1} \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{x}_j}$$

donde estamos usando la notación $(a^e - 1)/(a - 1) = 1 + a + \cdots + a^{e-1}$. Así, como $\overline{r_{i_k}} = 1$,

$$\frac{\overline{r_{i_k}^{e_k} - 1}}{\overline{r_{i_k} - 1}} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{e \text{ sumandos}} = e.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}(u_k r_{i_k}^{e_k} u_k^{-1}) = e_k u_k \frac{\overline{\partial r_{i_k}}}{\partial \mathbf{x}_j}.$$

Si llamamos $c_k := e_k \overline{u_k}$, donde ahora ya hemos proyectado en el anillo $\mathbb{Z}[G(\mathbf{X}|R)/G(\mathbf{X}|R)']$, obtenemos finalmente que

$$\frac{\overline{\partial r}}{\partial \mathbf{x}_j} = \sum_{p=1}^k c_k \frac{\overline{\partial r_{i_k}}}{\partial \mathbf{x}_j}.$$

Así pues, la nueva fila que añadimos a la matriz de Alexander A de la presentación (\mathbf{X}, R) es en realidad una combinación lineal de las que teníamos. Por lo tanto podemos restarle esta combinación lineal para obtener una fila nula y quitar esa fila, recuperando así A . Por tanto, las matrices de Alexander de ambas representaciones son equivalentes. De modo similar se procedería con la otra transformación de Tietze. \square

Corolario 4.6.1. *Los ideales elementales de un grupo finitamente presentado G son un invariante de G , no dependiendo, salvo isomorfismo, de la presentación finita.*

Rudimentos algebraicos acerca de módulos

Definición 4.6.1. *Dado un anillo unitario S , un S -módulo (a izquierda) unitario M es un grupo abeliano $(M, +)$ junto con una operación externa $S \times M \rightarrow M$, $(a, x) \mapsto ax$ de tal modo que*

1. $(a + b)x = ax + bx$,
2. $a(x + y) = ax + ay$,
3. $a(bx) = (ab)x$,
4. $1x = x$

para cualesquiera $a, b \in S$ y $x, y \in M$.

Una **combinación lineal** de los elementos $x_1, \dots, x_n \in M$ es un elemento del tipo $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \in M$ donde $a_1, \dots, a_n \in S$. Un **conjunto generador** de M es un subconjunto de modo que cualquier elemento de M es combinación lineal de elementos de ese subconjunto.

Un **submódulo** de M es un subgrupo abeliano de $(M, +)$ que es además cerrado por la multiplicación por elementos de S . Cualquier submódulo es un

módulo en sí mismo. El conjunto de combinaciones lineales de cualquier subconjunto siempre es un submódulo (**submódulo generado** por el subconjunto). La **suma** de dos submódulos N_1 y N_2 es $N_1 + N_2 := \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in N_1, x_2 \in N_2\}$, y es también un submódulo. Si $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ la suma se dice **directa** y se denota por $N_1 \oplus N_2$.

A partir de cualquier submódulo N de M se puede formar el **módulo cociente** M/N . Sus elementos son las clases $[x] := \bar{x} := x + N := \{x + z \mid z \in N\}$ con la suma y producto por elementos de S dados por

$$\begin{aligned}[x + y] &:= [x] + [y], \\ a[x] &:= [ax].\end{aligned}$$

Dos clases $[x], [y]$ son iguales si y solamente si $x - y \in N$. Así, en el módulo cociente los elementos de N se *desvanecen* ya que $[z] = [0]$ para todo $z \in N$.

Ejemplo 4.6.1. *Los grupos abelianos, junto con los espacios vectoriales, son el ejemplo más popular de módulos. En general un grupo abeliano puede ser visto como un \mathbb{Z} -módulo mediante*

$$ax := \underbrace{(x + \cdots + x)}_{a \text{ veces}} \text{ si } a > 0, \quad ax := -\underbrace{(x + \cdots + x)}_{|a| \text{ veces}} \text{ si } a < 0, \quad 0x := 0$$

Un **homomorfismo** entre los S -módulos M y N es una aplicación $\varphi: M \rightarrow N$ de modo que $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ y $\varphi(ax) = a\varphi(x)$ para cualesquiera $x, y \in M$ y $a \in S$. El **núcleo** de φ se define como $\ker \varphi := \{x \in M \mid \varphi(x) = 0\}$ y siempre es un submódulo de M . El conjunto $\varphi(M)$ es un submódulo de N . Si entre M y N existe un homomorfismo biyectivo (**isomorfismo**) entonces M y N se dice que son isomorfos. El primer teorema de isomorfía para módulos establece que $M/\ker \varphi$ es isomorfo a $\varphi(M)$.

Un subconjunto B de M se dice **libre** si en cualquier combinación lineal $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ de elementos distintos x_1, \dots, x_n de B que sea 0 todos los coeficientes a_1, \dots, a_n son necesariamente nulos. Una **S -base** de M es un subconjunto que es a la vez libre y generador.

Ejemplo 4.6.2. *No todos los módulos poseen bases. Por ejemplo, \mathbb{Z}_2 es un grupo abeliano, y por tanto un \mathbb{Z} -módulo. Puesto que $2x = \bar{0}$ para cualquier $x \in \mathbb{Z}_2$, pero $0 \neq 2 \in \mathbb{Z}$, a cualquier \mathbb{Z} -base de \mathbb{Z}_2 le está prohibido contener elementos. Por tanto la única \mathbb{Z} -base podría ser \emptyset , pero este conjunto no genera \mathbb{Z}_2 .*

Ejemplo 4.6.3. *El producto cartesiano $S \times \cdots \times S$ con la suma y producto por elementos de S componente a componente es un S -módulo y el subconjunto*

$$\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

sí es una S -base.

En general, dado un conjunto de símbolos $X := \{x_i \mid i \in I\}$, el **S -módulo libremente generado por X** es el conjunto $S^{(X)}$ de aplicaciones $f: X \rightarrow S$ que toman valor 0 en todos menos quizás en un número finito de elementos de X . Las operaciones que hacen a $S^{(X)}$ un S -módulo son

$$\begin{aligned}(f + g)(x_i) &:= f(x_i) + g(x_i) \\ (af)(x_i) &:= af(x_i)\end{aligned}$$

Podemos identificar $x_i \in X$ con la aplicación e_i que envía x_i a 1 pero anula al resto de elementos de X . Esto nos permite la siguiente identificación

$$f = \sum_{x_i \in X} f(x_i)e_i \leftrightarrow \sum_{\text{finita}} f(x_i)x_i$$

que usaremos muy a menudo. Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, el S -módulo $S^{(X)}$ lo denotamos por $Sx_1 \oplus \dots \oplus Sx_n$ y sus elementos, con la identificación anterior, serán combinaciones lineales formales $\alpha_1x_1 + \dots + \alpha_nx_n$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in S$.

Lema 4.6.1 (Evaluación). *Sea M un S -módulo e $\iota: X \rightarrow M$ una aplicación. Existe un único homomorfismo de X -módulos de $\iota: S^{(X)} \rightarrow M$ determinado por $x \mapsto \iota(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Puesto que los elementos de $S^{(X)}$ son combinaciones lineales formales de los elementos de X , una vez determinadas las imágenes de estos elementos, el homomorfismo queda determinado. La existencia del homomorfismo es obvia: basta definir $\sum_{\text{finita}} \alpha_i x_i \mapsto \sum \alpha_i \iota(x_i)$. \square

El lema nos dice que podemos evaluar los elementos de la base X de $S^{(X)}$ en cualquier otro módulo.

Podemos imponer restricciones a una base X de un módulo libre obligando a que ciertas combinaciones lineales sean 0, pero para ello hay que construir otro módulo.

Sea $R \subseteq S^{(X)}$. Definimos el **X -módulo generado por X con relaciones R** como el S -módulo cociente

$$S\langle X|R \rangle$$

de $S^{(X)}$ por el submódulo generado por R . Al tratarse de un módulo cociente, las clases determinadas por los elementos de R son todas nulas. Así pues, en este módulo sí que las clases asociadas a los elementos de X cumplen las relaciones impuestas por R .

Ejemplo 4.6.4. *Consideremos el \mathbb{Z} -módulo generado por x_1, x_2, x_3 con relaciones $x_2 + x_3$ y $3x_2 + x_3$. Este módulo está generado por los elementos $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, los cuales cumplen que $\bar{x}_2 + \bar{x}_3 = \bar{0}$, $3\bar{x}_2 + \bar{x}_3 = \bar{0}$.*

Restando las relaciones obtenemos que $2\bar{x}_2 = \bar{0}$ y que $\bar{x}_3 = -\bar{x}_2$. Esto nos dice que el generador \bar{x}_3 es superfluo y que la única condición real es que $2\bar{x}_2 = \bar{0}$, mientras que para \bar{x}_1 no hay ninguna condición. Es de esperar que este módulo sea isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.

Proposición 4.6.5. *Sea M un S -módulo y sea $\iota: X \rightarrow M$ una aplicación. Sea $\iota: S^{(X)} \rightarrow M$ el homomorfismo que evalúa $x_i \in X$ en $\iota(x_i) \in M$. Si $\iota(r) = 0$ para todo $r \in R$ entonces ι induce un homomorfismo de S -módulos $\pi: S\langle X|R \rangle \rightarrow M$ de modo que $[x_i] \mapsto \iota(x_i)$.*

Demostración. Basta comprobar que la aplicación $\pi(\sum a_i [x_i]) := \sum a_i \iota(x_i)$ está bien definida y es un homomorfismo de S -módulos ya que la unicidad es inmediata.

Primero hemos de comprobar que si $[x] = [y]$ entonces $\pi([x]) = \pi([y])$. En efecto, si $x = \sum a_i [x_i] = \sum b_j [x_j]$ entonces $\sum a_i x_i - \sum b_j x_j$ es una combinación lineal de elementos de R y por tanto $\sum a_i \iota(x_i) - \sum b_j \iota(x_j) = 0$ por hipótesis. Así, $\sum a_i \iota(x_i) = \sum b_j \iota(x_j)$ y el valor de $\pi(x)$ es independiente de su expresión como

combinación lineal de las clases de elementos de X . Finalmente, comprobar que es un homomorfismo de S -módulos es sencillo por la propia definición. \square

Dado un S -módulo M , podemos elegir un conjunto generador X (siempre existe ya que el propio M se genera a sí mismo). Tendremos un homomorfismo $\iota: S^{(X)} \rightarrow M$ de modo que $\iota(x) = x$ para todo $x \in X$. Puesto que X genera M , ι es suprayectivo. El primer teorema de isomorfía nos dice que

$$M \cong S^{(X)} / \ker \iota.$$

Por tanto, si $R \subseteq S^{(X)}$ es un conjunto de generadores de $\ker \iota$ entonces $M \cong S\langle X|R \rangle$. Diremos que (X, R) es una **presentación** de M . Si tanto X como R son finitos (en cuyo caso decimos que se trata de una **presentación finita**), digamos $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $R = \{\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} x_j \mid i = 1, \dots, m\}$ entonces la presentación se puede codificar en una **matriz de relaciones** de la presentación

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \dots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

Aunque los elementos de $S\langle X|R \rangle$ son clases, no usaremos la notación $[x]$ ni \bar{x} sino que seguiremos escribiendo x . Eso sí, asumiremos que los elementos de R son 0 vistos en $S\langle X|R \rangle$. A veces también se escribe $S\langle X|r = 0 \forall r \in R \rangle$ para indicar que en este módulo los elementos de R hay que verlos como 0.

Ejemplo 4.6.5. *Siguiendo con el ejemplo anterior, existe un homomorfismo*

$$\pi: \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_2 + x_3 = 0, 3x_2 + x_3 = 0 \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$$

de modo que $\pi(x_1) = (\bar{0}, 1)$, $\pi(x_2) = (\bar{1}, 0)$ y $\pi(x_3) = (\bar{1}, 0)$. Este homomorfismo es biyectivo pues es sencillo definir el homomorfismo inverso. Esto justifica la afirmación de que el módulo del ejemplo anterior es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.

No es difícil demostrar que la matriz de relaciones no depende, salvo equivalencia de matrices (véase la Sección 4.6) de la presentación finita usada para describir a M . Así pues, asociados a M tenemos los ideales elementales de cualquier matriz de relaciones. Estos ideales solamente dependen, salvo isomorfismo, de M .

Grupos abelianos finitamente generados

En el caso de que $S = \mathbb{Z}$, o ciertos anillos más generales como dominios de ideales principales, no es difícil darse cuenta de que realizando transformaciones elementales a la matriz A se puede llegar a obtener una matriz diagonal con entradas diagonales $d_1, \dots, d_l, 0, \dots, 0$ donde d_1, \dots, d_l no son nulos y cada uno divide al siguiente. Esto es muy importante ya que estos elementos generarán los ideales elementales y además indica que el módulo M tiene una presentación del siguiente tipo

$$S\langle y_1, \dots, y_n \mid d_1 y_1 = 0, \dots, d_l y_l = 0 \rangle$$

y que por tanto

$$M \cong S/\langle d_1 \rangle \times \dots \times S/\langle d_l \rangle \times \underbrace{S \times \dots \times S}_{n-l \text{ factores}}$$

Así, no es sorprendente el siguiente resultado que señalamos. Solamente el hecho de que si el grupo abeliano (\mathbb{Z} -módulo) es finitamente generado también admite una presentación finita merecería discutirse, pero no lo hacemos por motivo de espacio.

Teorema 4.6.3 (Clasificación de los grupos abelianos finitamente generados). *Sea M un grupo abeliano finitamente generado. Existe un número r y existen números positivos d_1, \dots, d_l tales que d_i divide a d_{i+1} $i = 1, \dots, l-1$ de modo que*

$$M \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{d_l} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$$

*(r factores \mathbb{Z}). Tanto el **rango** r como los **factores invariantes** d_1, \dots, d_l están unívocamente determinados por M .*

Puesto que $\mathbb{Z}_1 = \{0\}$, no es de extrañar que se omitan los $d_i = 1$.

Ejemplo 4.6.6. *La matriz de relaciones del Ejemplo 4.6.4 es*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo transformaciones elementales obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que el grupo abeliano es isomorfo a $\mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.

Rutinas en SAGEMath

Coloraciones mediante quandles

La función `es_quandle` estudia si una tabla de multiplicación define un quandle. La función `coloraciones` calcula todas las coloraciones de un nudo mediante un quandle.

```
#####
# es_quandle(MQ)
#
# Comprueba si la tabla corresponde a un quandle: deben usarse los números 1,2,3,...
#####

def es_quandle(MQ):

    MQ = matrix(MQ);
    print("Tabla a analizar:");
    print(MQ);print;
    #####
    # Parámetros auxiliares
    #####
    continuar = True;

    if MQ.is_square():
        n = MQ.ncols();    # Orden de la matrix, supuesto que sea cuadrada
    else:
        print("Error: la tabla del quandle no es cuadrada");
        continuar = False;
    #####
    # Primer axioma
    #####
    if continuar:
        if MQ.diagonal()!=range(1,n+1):
            print("Error: la tabla del quandle no cumple el primer axioma");
            continuar = False;
    #####
    # Segundo axioma
    #####
    if continuar:
        print("La tabla acaba de pasar el primer axioma...");
        i = 0;
        MQt = transpose(MQ);
        while(continuar and (i < n)):
            if Set(list(MQt[i]))!= Set(range(1,n+1)):
                print("Error: la tabla del quandle no cumple el segundo axioma", i);
                continuar = False;
            i=i+1;
    #####
    # Tercer axioma
    #####
    if continuar:
        print("La tabla acaba de pasar el segundo axioma...");
        i = 1;
        while continuar and (i < n+1):
            j = 1;
            while continuar and (j < n+1):
                k = 1;
```

```

        while continuar and (k < n+1):
            ij = MQ[i-1,j-1];
            ik = MQ[i-1,k-1];
            jk = MQ[j-1,k-1];
            if MQ[ij-1,k-1] != MQ[ik-1,jk-1]:
                print "Error: la tabla del quande no cumple el tercer axioma";
                print "     elementos involucrados ", i, " ", j, " ", k;
                continuar = False;
            k=k+1;
        j=j+1;
        i=i+1;
#####
# Conclusión
#####
if continuar:
    print("La tabla acaba de pasar el tercer axioma...");
    print("***** La tabla sí define un quandle *****");
return continuar;

#####
# coloraciones(K,Q)
#
# Se calculan las coloraciones de un nudo mediante un quandle. El algoritmo es ineficiente.
# Su ventaja es que no necesita usar la presentación del nudo como la clausura de una trenza.
# Su desventaja es que usa un bucle de m^n iteraciones (n = número de cruces, m = orden del quandle)
# Con la representación como clausura de una trenza, n se rebaja al número de hilos de la trenza.
#####

def coloraciones(K,Q):

    n = len(K); m = len(Q);
    resultado = [];

    #####
    # Se calcula la tabla para la operación inversa de la multiplicación (cruces +)
    #####
    QTTemp = list(matrix(Q).transpose()); QT = [list(a) for a in QTTemp];
    D = [[(QT[j].index(i+1) +1) for j in range(m)] for i in range(m)]; # tabla para la operacion +

    #####
    # Todos las posibles coloraciones usando 1...m para los n arcos.
    # Esta aproximación es terriblemente ineficiente. En el caso del nudo 10_132 y quandle Q0 involucra
    # un bucle de 63403380965376 iteraciones, lo que no está al alcance del servidor de SAGEMath de la UR.
    #####
    nc = m^n;
    i = 0;

    while i < nc:
        #####
        # al tomar los n dígitos de i en base m se van recorriendo todas las coloraciones
        #####
        caTemp = i.digits(m, padto = n);

        #####
        # colores de los arcos. CUIDADO: el primer color es el del arco 0, es decir del n.
        #####

        ca = [c + 1 for c in caTemp];

        #####
        # Se crea la lista de cruces:
        # [signo, color arco superior, color arco entrante inferior, color arco saliente inferior]
        # por comodidad. CUIDADO: el primer elemento de la lista es el del cruce 0, es decir, el de n.
        # Luego siguen el del 1, 2, etc.
        #####
        KC= [[K[j].sign(),ca[K[j].abs()%n],ca[j],ca[(j+1)%n]] for j in range(n)];

        #####
        # Se comprueba la coherencia de esa coloración respecto del quandle
        #####
        valida = True;

```

```

for c in KC:
    if (c[0] == 1 and c[3] != D[c[2]-1][c[1]-1]) or (c[0] == -1 and c[3] != Q[c[2]-1][c[1]-1]):
        valida = False;
        break;

####
# Se es coherente y no trivial se gira la lista
# para que el primer dato sea el color del primer arco, etc.
####
if valida and ca != [ca[0] for j in range(n)]:
    ca.append(ca[0]); ca.remove(ca[0]);
    resultado.append(ca);

i = i+1;

return resultado;

```

Coloraciones de los nudos 10_{132} y 5_1 .

La coloración mediante quandles permite distinguir de forma sencilla los nudos 10_{132} y 5_1 .

```

#####
# Estudio del nudo 10_132 sin tanta carga computacional superflua
# Estrategia: a partir del diagrama, se fija el color de algunas aristas, se deduce el de las demás
# en función de las ya fijadas y se comprueba la coherencia de la coloración.
# En el caso del nudo 10_132 esto reduce el bucle de 63403380965376 iteraciones a 13824 (una notable mejora).
# Se fija el color de las aristas 1, 4, 8.
# La programación es independiente del quandle, solo es específica del nudo.
# Por lo demás, la programación es como en el caso general, y no se comenta.
#####

def coloraciones10_132(Q):
    K = [8,-4,-6,-2,-1,-8,-3,10,-5,1];      # Nudo 10_132
    n = len(K); m = len(Q);
    resultado = [];

    QTTemp = list(matrix(Q).transpose()); QT = [list(a) for a in QTTemp];
    D = [[(QT[j].index(i+1) +1) for j in range(m)] for i in range(m)];

    df = 3; nc = m^df; i = 0;

    while i < nc:
        caTemp = i.digits(m,padto = df);
        c1 = caTemp[0]+1; c4 = caTemp[1]+1; c8 = caTemp[2] + 1;      # colores para las aristas 1, 4 y 8.
        c2 = Q[c1-1][c4-1];
        c3 = D[c4-1][c2-1];
        c5 = Q[c4-1][c1-1];
        c10 = Q[c1-1][c8-1];
        c9 = Q[c10-1][c1-1];
        c7 = Q[c8-1][c10-1];
        c6 = D[c7-1][c3-1];

        ca = [c10,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9];

        KC= [[K[j].sign(),ca[K[j].abs()%n],ca[j],ca[(j+1)%n]] for j in range(n)];

        valida = True;
        for c in KC:
            if (c[0] == 1 and c[3] != D[c[2]-1][c[1]-1]) or (c[0] == -1 and c[3] != Q[c[2]-1][c[1]-1]):
                valida = False;
                break;

        if valida and ca != [ca[0] for j in range(n)]:
            ca.append(ca[0]); ca.remove(ca[0]);
            resultado.append(ca);

        i = i+1;

    return resultado

```

```
#####
# Estudio del nudo 5_1 sin tanta carga computacional superflua
# Estrategia: a partir del diagrama, se fija el color de dos de las aristas, se deduce el de las demás
# en función de de las ya fijadas. Se comprueban las dos condiciones de compatibilidad teóricas que aparecen.
# En este caso se reduce el blucle de 7962624 iteraciones a uno de 576.
# También se reduce la complejidad de la comprobación de la coherencia de la coloración.
# Se fija el color de las aristas 1, 3.
# La programación es independiente del quandle, solo es específica del nudo.
# Por lo demás, la programación es como en el caso general, y no se comenta.
#####

def coloraciones5_1(Q):
    K = [-3,-4,-5,-1,-2]; # Nudo 5_1
    n = len(K); m = len(Q);
    resultado = [];

    df = 2; nc = m^df; i = 0;

    while i < nc:
        caTemp = i.digits(m, padto = df);
        c1 = caTemp[0]+1; c3 = caTemp[1]+1; # colores de las aristas 1 y 3
        c4 = Q[c3-1][c1-1];
        c2 = Q[c1-1][c4-1];
        c5 = Q[c4-1][c2-1];

        ca = [c5,c1,c2,c3,c4];

        if c3 == Q[c2-1][c5-1] and c1 == Q[c5-1][c3-1] and ca != [ca[0] for j in range(n)]:
            ca.append(ca[0]); ca.remove(ca[0]); resultado.append(ca);

        i = i+1;

    return resultado
```

Algunos quandles y nudos codificados para usar- los como ejemplos

```
#####
# Representación usada para el nudo:
# Primero se toma el nudo orientado. Se parte de un cruce 1, del cual parte el arco 1, y se siguen los
# arcos, numerando consecutivamente los cruces que van apareciendo y también los arcos que vamos usando.
# Al hacerlo así, en el cruce i entra el arco i-1 y sale el arco i.
# En el cruce 1 entra el arco 0 (que equivale al n) y sale el 1.
# El nudo se representa como una lista que contiene en la posición i un dato acerca del cruce i: el número
# de la arista superior corregido en signo de acuerdo a si el cruce es de tipo + o de tipo - (regla mano derecha).
#####
K3_1 = [-2, -3, -1]; # Trébol
K4_1 = [-3,4,-1,2]; # Nudo 8
K5_2 = [-3,-4,-1,-5,-2]; # Nudo 5_2
K5_1 = [-3,-4,-5,-1,-2]; # Nudo 5_1
K10_132 = [8,-4,-6,-2,-1,-8,-3,10,-5,1]; # Nudo 10_132

#####
# Quandle que se va a usar (es distributivo a derecha, por lo que es la multiplicación a derecha la invertible)
# Esta operación se usa en los cruces -
# La lista de quandles se ha obtenido de http://shell.cas.usf.edu/~saito/QuandleColor/
# Esta página contiene implementaciones para GAP de ciertas funciones para manipular quandles.
#####

R1 = [[1,3,2],[3,2,1],[2,1,3]]; # RIG[1]

R2 = [[1, 4, 2, 3],
      [3, 2, 4, 1],
      [4, 1, 3, 2],
      [2, 3, 1, 4]]; # RIG[2]

R3 = [[1, 3, 5, 2, 4],
      [5, 2, 4, 1, 3],
      [4, 1, 3, 5, 2],
```

```

[3, 5, 2, 4, 1],
[2, 4, 1, 3, 5]];                                # RIG[3]

R8 = [[1, 3, 5, 7, 2, 4, 6],
      [7, 2, 4, 6, 1, 3, 5],
      [6, 1, 3, 5, 7, 2, 4],
      [5, 7, 2, 4, 6, 1, 3],
      [4, 6, 1, 3, 5, 7, 2],
      [3, 5, 7, 2, 4, 6, 1],
      [2, 4, 6, 1, 3, 5, 7]];                    # RIG[8]

R29 = [[1, 10, 8, 6, 4, 2, 11, 9, 7, 5, 3],
       [4, 2, 11, 9, 7, 5, 3, 1, 10, 8, 6],
       [7, 5, 3, 1, 10, 8, 6, 4, 2, 11, 9],
       [10, 8, 6, 4, 2, 11, 9, 7, 5, 3, 1],
       [2, 11, 9, 7, 5, 3, 1, 10, 8, 6, 4],
       [5, 3, 1, 10, 8, 6, 4, 2, 11, 9, 7],
       [8, 6, 4, 2, 11, 9, 7, 5, 3, 1, 10],
       [11, 9, 7, 5, 3, 1, 10, 8, 6, 4, 2],
       [3, 1, 10, 8, 6, 4, 2, 11, 9, 7, 5],
       [6, 4, 2, 11, 9, 7, 5, 3, 1, 10, 8],
       [9, 7, 5, 3, 1, 10, 8, 6, 4, 2, 11]];      # RIG[29]

R30 = [[1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5, 11, 6],
       [7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5, 11, 6, 1],
       [2, 8, 3, 9, 4, 10, 5, 11, 6, 1, 7],
       [8, 3, 9, 4, 10, 5, 11, 6, 1, 7, 2],
       [3, 9, 4, 10, 5, 11, 6, 1, 7, 2, 8],
       [9, 4, 10, 5, 11, 6, 1, 7, 2, 8, 3],
       [4, 10, 5, 11, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9],
       [10, 5, 11, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4],
       [5, 11, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10],
       [11, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5],
       [6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5, 11]];      # RIG[30]

R31 = [[1, 6, 11, 5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7],
       [8, 2, 7, 1, 6, 11, 5, 10, 4, 9, 3],
       [4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 6, 11, 5, 10],
       [11, 5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 6],
       [7, 1, 6, 11, 5, 10, 4, 9, 3, 8, 2],
       [3, 8, 2, 7, 1, 6, 11, 5, 10, 4, 9],
       [10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 6, 11, 5],
       [6, 11, 5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1],
       [2, 7, 1, 6, 11, 5, 10, 4, 9, 3, 8],
       [9, 3, 8, 2, 7, 1, 6, 11, 5, 10, 4],
       [5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 6, 11]];      # RIG[31]

Q32 = [[1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7, 11, 4, 8],
       [9, 2, 6, 10, 3, 7, 11, 4, 8, 1, 5],
       [6, 10, 3, 7, 11, 4, 8, 1, 5, 9, 2],
       [3, 7, 11, 4, 8, 1, 5, 9, 2, 6, 10],
       [11, 4, 8, 1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7],
       [8, 1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7, 11, 4],
       [5, 9, 2, 6, 10, 3, 7, 11, 4, 8, 1],
       [2, 6, 10, 3, 7, 11, 4, 8, 1, 5, 9],
       [10, 3, 7, 11, 4, 8, 1, 5, 9, 2, 6],
       [7, 11, 4, 8, 1, 5, 9, 2, 6, 10, 3],
       [4, 8, 1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7, 11]];      # Q32

Q10 = [[ 1, 11, 2, 19, 8, 13, 10, 15, 18, 5, 23, 4, 22, 1, 3, 9, 1, 7, 6, 16, 12, 21, 24, 20 ],
      [ 23, 2, 21, 17, 3, 4, 22, 19, 14, 2, 15, 2, 24, 7, 5, 1, 20, 8, 9, 13, 6, 18, 11, 16 ],
      [ 11, 6, 3, 23, 1, 21, 5, 13, 19, 17, 2, 16, 15, 18, 7, 8, 24, 12, 4, 3, 14, 3, 10, 9 ],
      [ 12, 20, 19, 4, 6, 22, 23, 10, 8, 24, 7, 11, 16, 13, 4, 2, 21, 4, 1, 17, 5, 9, 3, 14 ],
      [ 15, 21, 11, 22, 5, 17, 9, 7, 10, 4, 1, 24, 23, 20, 8, 5, 2, 13, 5, 12, 3, 6, 14, 18 ],
      [ 19, 17, 14, 9, 2, 6, 6, 20, 22, 13, 5, 23, 1, 21, 10, 3, 4, 16, 8, 15, 11, 12, 18, 6 ],
      [ 5, 14, 1, 11, 10, 7, 7, 3, 20, 9, 16, 8, 17, 23, 12, 22, 15, 19, 21, 18, 13, 2, 4, 7 ],
      [ 3, 18, 15, 24, 9, 19, 1, 8, 7, 22, 20, 14, 12, 16, 13, 4, 11, 17, 2, 6, 8, 5, 8, 10 ],
      [ 7, 19, 24, 10, 4, 12, 18, 1, 9, 8, 9, 22, 9, 2, 14, 6, 5, 20, 3, 23, 15, 17, 16, 21 ],
      [ 8, 10, 23, 14, 22, 15, 20, 5, 1, 10, 18, 10, 6, 24, 16, 17, 3, 21, 11, 9, 7, 4, 13, 19 ],
      [ 24, 5, 6, 12, 15, 2, 4, 17, 11, 21, 11, 20, 11, 10, 1, 7, 16, 3, 22, 8, 18, 14, 19, 23 ],
      [ 21, 12, 8, 1, 20, 18, 3, 16, 17, 12, 4, 12, 7, 6, 19, 14, 22, 23, 13, 11, 24, 15, 9, 5 ],
      [ 6, 16, 7, 2, 18, 10, 15, 14, 13, 23, 13, 3, 13, 12, 17, 24, 19, 22, 20, 21, 4, 1, 5, 8 ],
      [ 14, 9, 12, 16, 23, 11, 2, 4, 15, 19, 21, 18, 3, 14, 20, 13, 14, 6, 24, 5, 10, 8, 7, 22 ],
      [ 2, 3, 5, 15, 7, 20, 8, 12, 21, 6, 24, 13, 19, 9, 15, 10, 23, 15, 17, 14, 16, 11, 22, 1 ]],

```

```
[ 18, 23, 13, 20, 16, 14, 11, 24, 12, 15, 17, 6, 8, 3, 21, 16, 10, 9, 16, 2, 22, 7, 1, 4 ],  
[ 17, 13, 10, 5, 21, 9, 12, 18, 4, 16, 8, 15, 20, 17, 22, 11, 17, 24, 7, 19, 2, 23, 6, 3 ],  
[ 10, 22, 16, 18, 24, 3, 21, 2, 23, 7, 6, 9, 5, 11, 18, 12, 8, 18, 14, 1, 19, 13, 20, 17 ],  
[ 4, 8, 9, 3, 19, 1, 13, 6, 2, 18, 14, 7, 21, 22, 23, 19, 12, 11, 19, 10, 20, 24, 17, 15 ],  
[ 9, 24, 20, 21, 14, 8, 19, 11, 16, 1, 12, 5, 4, 15, 6, 23, 7, 10, 18, 20, 17, 20, 2, 13 ],  
[ 22, 4, 18, 6, 11, 5, 17, 21, 24, 20, 3, 1, 2, 19, 9, 15, 13, 14, 10, 7, 21, 16, 21, 12 ],  
[ 13, 7, 22, 8, 17, 23, 16, 9, 5, 14, 10, 19, 18, 4, 24, 21, 6, 2, 15, 22, 1, 22, 12, 11 ],  
[ 20, 15, 4, 7, 13, 16, 14, 23, 6, 3, 22, 17, 10, 5, 11, 18, 9, 1, 12, 24, 23, 19, 23, 2 ],  
[ 16, 1, 17, 13, 12, 24, 24, 22, 3, 11, 19, 21, 14, 8, 2, 20, 18, 5, 23, 4, 9, 10, 15, 24 ]];
```